Zur Berechnung der Triebwerkstangen von Kolbenmaschinen.

Von der

Kgl. Technischen Hochschule zu Breslau

zur

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

Dissertation.

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Karl Eymann

aus Langmeil (Pfalz).

Referent:
Prof. Dr. Ing. Schenk.

Korreferent:
Prof. Dr. Ing. Heinel.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1913.

1914

Thiemesche Druckereien G. m. b. H., Kaiserslautern.

5539.

Zur Berechnung der Triebwerkstangen von Kolbenmaschinen.

Von der

Kgl. Technischen Hochschule zu Breslau

zur

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

Dissertation.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Vorgelegt von

Dipl.-Ing. Karl Eymann

aus Langmeil (Pfalz).

Referent:
Prof. Dr. Ing. Schenk.

Korreferent:
Prof. Dr. Ing. Heinel.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1913.

1914

Thiemesche Druckereien G. m. b. H., Kaiserslautern.

Einleitung.

Die allgemein gebräuchliche Berechnung der Kolben-, Trieb- und Kuppelstangen erfolgt in der Weise, daß man eine Stange in ihren Dimensionen schätzungsweise annimmt und dann die Sicherheit gegen Ausknicken mit Hilfe einer Knickformel, die für den gegebenen Fall brauchbar erscheint, feststellt. Errechnet sich dabei ein genügend großer Wert für diese Sicherheit, etwa 10—20, ja bisweilen nur 2—3, so gibt man sich mit den angenommenen Verhältnissen zufrieden. Eine Kenntnis des tatsächlichen Zustandes, der Materialbeanspruchungen und der Durchbiegungen wird dabei nicht erlangt. Man kennt blos eine obere Grenze, bis zu der die Belastungen keineswegs anwachsen dürfen. Wie schwierig oft die genaue Festlegung dieser Grenze ist und wie unzuverlässig die angegebenen Werte meistens sind, zeigt eine Abhandlung von Otto Mies*) über Kolbenstangen, der auf rechnerischem Wege alle möglichen Arten nachprüfte und dabei fand, daß die Gefahr der Ueberanstrengung oft um das dreifache größer ist als vom Konstrukteur nach überschlägiger Rechnung vorausgesetzt wurde. Zwanzigfache Sicherheit war verlangt, siebenfache wurde nur ausgeführt und trotzdem bewährte sich die Kolbenstange ausgezeichnet.

Unter solchen Umständen tritt sicherlich die Notwendigkeit zutage, sich über das tatsächliche Verhalten der empfindlichsten Glieder der Maschine Klarheit zu verschaffen. Die Gefahr des Ausbiegens der Stangen tritt heute bei den hohen Kolbengeschwindigkeiten mehr und mehr in den Hintergrund gegenüber anderen Erschei-

*) Otto Mies: Die Knicksicherheit von Kolbenstangen. Dinglers politechn. Journal 1912 S. 273.

nungen, wie Warmlaufen und Anfressen der Gleitlager, der Kolben und des Kreuzkopfes, Uebelständen, denen man nur wirksam begegnen kann, sobald man ihre Ursachen kennt. Diese liegen meistens in den elastischen Eigenschaften der Körper begründet und sie zu verfolgen ist daher oft unerläßlich, vor allem da eine hohe Vollkommenheit der Konstruktion am besten erreicht wird, sobald jede Unbestimmtheit in der Kräftewirkung vermieden ist.

Neben der Feststellung der Sicherheit gegen Ausknicken berücksichtigt man auch hie und da den Einfluß nicht achsial gerichteter Belastungen, wie Beschleunigungskräfte, Eigengewicht etc. ohne dabei gleichzeitig die Wirkung der Zug- und Druckkräfte auf die Biegungsbeanspruchungen zu beachten.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie es möglich ist alle Arten von Stangen in Bezug auf Anstrengung des Materials auf Durchbiegung, Auflagerdruck usw. zu berechnen, wobei sowohl achsiale Kräfte mit zentrischem oder exzentrischem Angriff, als auch anders geartete Belastungen vorkommen können. Die Größe der Knickgefahr, deren genaue Kenntnis wichtig ist zur Beurteilung des Sicherheitsgrades findet sich unter der Hand ohne neue Hilfsmittel.

Bei der Untersuchung wird Wert darauf gelegt mit möglichst einfachen Mitteln eine Lösung der Frage der Stangenberechnung herbeizuführen. Schwierige mathematische Ableitungen, deren Verfolgung dem praktisch tätigen Ingenieur meistens unmöglich ist, werden auf ein Mindestmaß beschränkt.

Wo irgend möglich, kommt die graphische Methode zur Anwendung, da sie übersichtlichere Resultate liefert und besonders bei schwierigen Fällen eine Verfolgung der einzelnen Vorgänge in bedeutend anschaulicherer Weise als die Rechnung zuläßt. Ja wo letztere versagt, gewährleistet sie noch oft eine Lösung der Aufgabe, wenn vielleicht auch nur in einer guten Annäherung.

Belastungsfall einer Triebwerkstange.

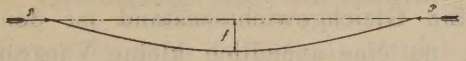
An einer Stange können zur Wirkung kommen:

1. Senkrecht zur Stabachse gerichtete Kräfte und irgend welche Momente.
2. Kräfte, die in Richtung der Stabachse wirken.

Der erste Punkt wird bei den einzelnen Fällen am besten gesondert vorgenommen und erheischt jeweils neue Besprechungen. Punkt 2 dagegen erfordert für alle Stangenarten die gleichen Betrachtungen und soll nun zuerst allgemein behandelt werden.

Beanspruchung durch achsiale Kräfte.

Die an den Stabenden zur Wirkung kommenden Kräfte P seien Druckkräfte. Sie erzeugen einmal reine Druckspannungen, dann aber gewinnen sie auch einen Einfluß auf die Biegungsbeanspruchungen, sobald der Stab



bereits eine gewisse Krümmung erlitten hat. Die Ordinaten der gebogenen Stabmittellinie, von der geraden Stabachse aus gemessen, liefern den Druckkräften Hebelarme zu wirksamen Biegungsmomenten.

Die anfängliche Krümmung der Stabmittellinie stelle eine Sinuslinie dar (Fig. 1) und an den Stabenden wirken die Druckkräfte P. Der Stab wird sich weiter verbiegen bis Gleichgewicht zwischen den inneren und äußeren Kräften hergestellt ist. Die Stabmittellinie können wir in einem entsprechenden Maßstab direkt als Momentenlinie auffassen und daraus eine neue elastische Linie konstruieren. Diese liefert die gleichen Ergebnisse wie die anfängliche und wir müßten unendlich lange fortfahren, um den Endzustand zu erreichen. Die Linien sind alle Sinuslinien wie später bewiesen wird. Falls die anfängliche Krümmung der Stabmittellinie keine reine Sinuslinie

darstellt, behalten die Betrachtungen ihre Gültigkeit, denn die Kurve geht unter dem Einfluß der Kräfte sehr bald in eine sinusähnliche Linie über (siehe S. 12).

Bei dieser Konstruktion einer Biegungslinie aus der vorhergehenden können nun 3 Fälle eintreten:

1. Die von Linie EL_1 eingeschlossene Fläche liefert eine elastische Linie EL_2, die weniger stark gekrümmt ist, als $EL_1 \cdot \rho_2 > \rho_1$, wenn ρ_1 und ρ_2 die Krümmungsradien bedeuten.
2. EL_1 ergibt als Momentenfläche aufgefaßt eine Linie von gleicher Krümmung. $\rho_2 = \rho_1$
3. EL_1 erzeugt eine Verbiegungslinie, die stärkere Krümmung aufweist. $\rho_2 < \rho_1$

Bei letzterem Falle ist ein Gleichgewichtszustand ausgeschlossen, da die Durchbiegungen ins Unendliche anwachsen. Der Stab knickt aus, wie man sich bei diesem Biegungsbelastungsfalle gewöhnlich ausdrückt.

Die zweite Bedingung liefert den Grenzfall zwischen 1 und 3. Ein Gleichgewichtszustand ist denkbar, doch ist er labil, da eine unendlich kleine Vergrößerung der Krümmung ein vollständiges Ausbiegen herbeiführt. In dieser Lage befindet sich ein Stab, der als Belastung die Euler'sche Knicklast trägt. Auf diese Bedingung gründet Vianello*) ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Knicksicherheit von Stäben.

Bei vorliegender Untersuchung kommt hauptsächlich der erste Punkt in Betracht, daß die Krümmungen der elastischen Linien immer geringer werden. Ein stabiler Gleichgewichtszustand ist zu erwarten, dessen Eintritt wir nun feststellen wollen.

Haben die anfänglichen Ordinaten der Stabmittellinie einen solchen Zuwachs erfahren, daß sie mit der Kraft P multipliziert, eine Vergrößerung der ursprünglichen Linie bewirken, die diesem Zuwachse entspricht, so können keine neuen Biegungsmomente auftreten; oder mit anderen Worten:

---

*) Vianello: Graphische Untersuchung der Knickfestigkeit gerader Stäbe Z. d. V. d. I. 1898 S. 1436.

Der Gleichgewichtszustand ist erreicht, wenn die gesamte Fläche, welche die endgültige Krümmungslinie des Stabes einschließt, als Momentenfläche aufgefaßt, eine elastische Linie liefert, die gleich der Vergrößerung der ursprünglichen Krümmung ist.

Auf graphischem Wege könnte man nun aus einer anfänglichen Biegungslinie immer neue konstruieren, deren Krümmung sich dem Werte O allmählich nähert und ihn bei einer unendlichen Anzahl erreicht. Alle Linien zusammen addiert ergebe das gewünschte Resultat, den oben erwähnten Gleichgewichtszustand.

Viel kürzer und sicherer kann man zum Ziele gelangen, sobald man die Proportionalität zwischen den aufeinanderfolgenden Linien beachtet, die jetzt nachgewiesen werden soll.

Gleichung der Sinuslinie.

Die Sinuslinie kann dargestellt werden durch Projektion von Kreispunkten auf dem abgewickelten Umfang

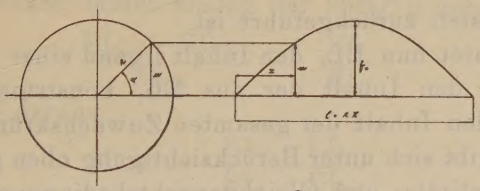


Fig. 2.

wie Fig. 2 angibt. Dann gelten die Beziehungen für die, aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen:

$$u = r \cdot \sin \alpha$$

$$r = f_0$$

$$x = r \cdot \alpha \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{x}{r}$$

$$l = r\,\pi \quad \text{„} \quad r = \frac{l}{\pi}$$

daraus:

$$u = f_0 \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l}$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$E\Theta \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -P \cdot (y + u)$$

wenn u die Ordinate der ursprünglichen Linie und y die der neuen bedeutet.

Setzt man den Wert für u ein, so erhält man:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}\left(y + f_0 \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l}\right)$$

Für die Grenzbedingungen ($y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$) ergibt sich die Lösung der Gleichung zu

$$y = \frac{f_0}{\frac{\pi^2 \cdot E\Theta}{P \cdot l^2} - 1} \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} = f \cdot \sin \pi \cdot \frac{x}{l} \qquad 1)$$

wobei f den größten Wert von y für $x = \frac{l}{2}$ angibt. f stellt den Biegungspfeil der neuen elastischen Linie dar, die wieder eine Sinuslinie ist. Wir erkennen, daß die aufeinanderfolgenden Linien ähnlich sind. Da die Kräfte P keine Veränderung erleiden, muß selbstverständlich das Verhältnis der Ordinaten zweier aufeinanderfolgender Linien immer das gleiche sein, denn es kann ja stets eine solche Verzerrung gewählt werden, daß der folgende Fall auf den ersten zurückgeführt ist.

Bedeutet nun EL_1 den Inhalt irgend einer elastischen Linie, EL_2 den Inhalt der aus EL_1 konstruierten Linie und ELx den Inhalt der gesamten Zuwachskrümmung von EL_1, so ergibt sich unter Berücksichtigung oben gefundener Proportionalitäts- und Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{EL_1 + EL\,x}{EL\,x} = \frac{EL_1}{EL_2} \qquad 2)$$

Die Flächeninhalte wurden hier eingeführt, da sie im gleichen Verhältnis wie die Ordinaten zueinander stehen und durch Ungenauigkeiten in der Zeichnung nicht besonders beeinflußt werden.

Das Verhältnis $\frac{EL_1 + EL\,x}{EL\,x}$ und $\frac{EL_1}{EL_2}$ stellt den Wert

*) Föppl: Vorlesungen über techn. Mechanik Bd. III S. 325. 4. Aufl.

dar mit dem die Kräfte P multipliziert werden müßten, um den unter Punkt 2 aufgeführten Fall zu erhalten. Gibt somit die Knicksicherheit an (Verfahren von Vianello).

Aus Gleichung 2 bestimmt sich:

$$EL\,x = \frac{EL_1 \cdot EL_2}{EL_1 - EL_2} \qquad 2a)$$

Der Zuwachskoeffizient mit dem die Ordinaten von EL_2 zu multiplizieren sind, ist

$$n = \frac{EL\,x}{EL_2} = \frac{EL_1}{EL_1 - EL_2}$$

EL_1 kann hier die ursprüngliche gebogene Stabmittellinie ELu bedeuten, da alle folgenden Linien ihr ähnlich sind. Die Arbeit erstreckt sich also nur auf die Konstruktion einer einzigen Krümmungslinie.

Wirken die Kräfte P streckend auf den gekrümmten Stab, so lautet die Gleichgewichtsbedingung:

Die Fläche der endgültigen elastischen Linie als Momentenfläche aufgefaßt, muß eine Krümmung liefern, die gleich derjenigen ist, um welche die anfängliche vermindert wird.

Die Formel lautet analog der unter 2 aufgestellten:

$$\frac{EL_1 - EL\,x}{EL\,x} = \frac{EL_1}{EL_2} \qquad 3)$$

und daraus

$$EL\,x = \frac{EL_1 \cdot EL_2}{EL_1 + EL_2} \qquad 3a)$$

n ist wieder gleich $\frac{EL\,x}{EL_2}$

Anwendung der Ergebnisse auf ein Beispiel.

Gegeben sei eine Stange mit einem Durchmesser

$d = 100$ mm

für den kreisförmigen Querschnitt beträgt dann das Trägheitsmoment $\Theta = 490$ cm⁴

und eine Länge $l = 3000$ mm

Die Druckbelastung sei $= P = 30000$ kg.

Der Elastizitätsmodul soll angenommen werden zu

$$E = 22 \cdot 10^5 \text{ k/cm}^2$$

Die anfängliche größte Durchbiegung zu $f_0 = 0{,}965$ mm.

1. Rechnerische Lösung.

Nach der Euler'schen Knickformel errechnet sich die Kraft, bei welcher der Stab eine unendlich große Durchbiegung erfährt, zu:

$$P_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \Theta}{l^2} = 118000 \text{ kg.}$$

Die Knicksicherheit beträgt demnach $k = \frac{P_E}{P} = 3{,}93$.

Der Biegungspfeil f der neuen elastischen Linie wird nach Formel 1

$$f = \frac{f_0}{\frac{\pi^2 E\Theta}{Pl^2} - 1} = 0{,}0328 \text{ cm} = 0{,}328 \text{ mm.}$$

Berechnet man für verschiedene Werte von P die zugehörigen Biegungspfeile f und trägt dieselben in Fig. 3

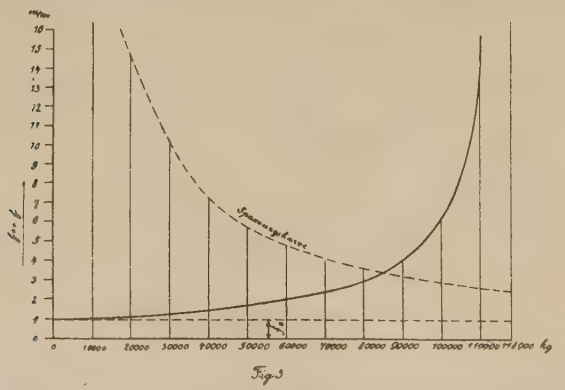


Fig. 3

von f_0 aus auf, so erhält man eine Hyperbel, die erkennen läßt, wie gering der Einfluß der achsialen Kräfte bei einigermaßen höherer Knicksicherheit sich gestaltet und wie sie rasch an Bedeutung gewinnen, sobald wir uns der Euler'schen Knickkraft nähern. In der Figur ist weiterhin eine Spannungskurve eingetragen, die so entstand, daß eine Materialbeanspruchung von $\sigma = 3000$ kg/cm² die je-

weiligen Biegungspfeile für verschiedene Belastungen P berechnet wurden. Die Biegungsformel lautet $\sigma = \frac{M}{W}$ kg/cm² und wenn für $M = P \cdot f$ eingesetzt wird, ergibt sich

$$f = \frac{\sigma \cdot W}{P} \text{ cm}$$

Der Schnittpunkt der beiden Kurven bezeichnet die Belastung, bei welcher der Bruch bereits infolge der Biegungsbeanspruchung allein eintritt, wenn $\sigma = 3000$ die Bruchfestigkeit des Materials bedeutet. Sie ist bedeutend geringer als die Euler'sche Formel angibt.

In vorliegender Abhandlung kommt für den Wert der Knicksicherheit stets der Abstand von der Kraft in Betracht, die eine unendliche Ausbiegung hervorruft und nicht von der, die den Bruch herbeiführt.

2. Graphische Lösung.

In nachstehender Fig. 4 ist die zeichnerische Lösung ausgeführt. Die anfängliche Biegungslinie ELu in 1000 facher Verzerrung wurde als Momentenfläche aufgefaßt und

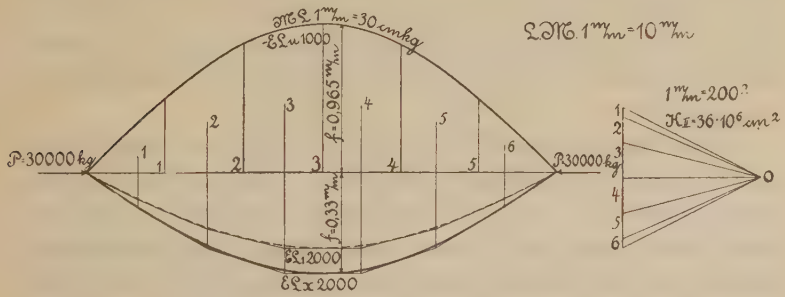


Fig. 4.

der passende Momentenmaßstab 1 mm = 30 cmkg festgelegt. Nach dem bekannten Mohr'schen Verfahren ließ sich eine elastische Linie EL_1 in 2000 facher Verzerrung konstruieren. Bei Zugrundlegung eines Längenmaßstabes 1 mm = 1 cm und einer 1000 fachen Verzerrung ergibt der Flächeninhalt von ELu 183,6 cm² und von $EL_1 = 47$ cm².

Die Knicksicherheit folgt nach früherem zu $k = \frac{183,6}{47} = 3,91$ und der Inhalt der Zuwachslinie $ELx = \frac{183,6 \cdot 47}{183,6 - 47} = 63,2\ cm^2$; $n = 1,345$. Nach dem Aufzeichnen der Linie ELx läßt sich f herausmessen zu 0,33 mm. Die Uebereinstimmung zwischen den rechnerisch und zeichnerisch gefundenen Werten ist ziemlich vollkommen.

Ausdehnung der Betrachtung auf den allgemeinen Fall, bei dem eine beliebige Verbiegung eines Stabes vorliegt und dessen Abstützung in irgend einer Weise ausgeführt sein mag. Die Gleichgewichtsbedingung bleibt die gleiche, wie im einfachen Falle: Immer muß die endgültige Krümmungslinie als Momentenlinie aufgefaßt, die Verbiegung liefern, die zur anfänglichen summiert wird.

Weist der Stab eine gebogene Mittellinie auf, welche derjenigen elastischen Linie ähnlich ist, die durch die Einwirkung achsialer Kräfte allein auf den geraden Stab beim Ausknicken erzeugt würde, so bleiben die für den einfachen Fall gefundenen Ergebnisse hier absolut gültig. Die Proportionalität zwischen den Inhalten der Linien besteht auch hier und das Verhältnis irgend zweier Linieninhalte bestimmt die Knicksicherheit, wie Vianello bewiesen hat.

Bei ganz willkürlicher Krümmung der Stabmittellinie gelten die Betrachtungen nicht mehr absolut, da die einzelnen konstruierten Linien der Form nach etwas verschieden sind. Jedoch ist der Unterschied in der Gestalt ziemlich gering und bei wiederholter Aufzeichnung von elastischen Linien nimmt er sehr rasch ab, sodaß bald eine fast vollkommene Aehnlichkeit erreicht wird. Besonders bei der Bildung des Verhältnisses aus den Inhalten zweier Linien machen die Unterschiede kaum etwas aus, wie folgende Beispiele lehren. Die Annäherung kann durch die Konstruktion immer neuer Linien beliebig weit getrieben werden. Für die Restverbiegung wird wieder Formel 2 benutzt:

$$ELx^1 = \frac{ELu \cdot EL_1}{ELu - EL_1}; \quad ELx^2 = \frac{EL_1 \cdot EL_2}{EL_1 - EL_2}$$

wobei die Annäherung immer besser wird. Am Schlusse ist eine Summierung der Linien nötig und wir erhalten:

$EL = ELu + ELx^1$ oder genauer $EL = ELu + EL^1 + ELx^2$

ELu bedeutet den Inhalt der ursprünglichen Krümmungslinie.

Zur Kontrolle kann man aus dem Endergebnis eine elastische Linie bestimmen um zu sehen, ob die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.

Auflagerkräfte und Momente sind genau so zu behandeln wie die Ordinaten der elastischen Linie.

Beispiel zu dem allgemeinen Fall.

Gegeben ist eine Stange mit einer in Fig. 5a eingezeichneten krummen Mittellinie ELu. Sie ist in 3 Punkten A, B und C gestützt. A und B sind verschiebbare Gleitlager, C ein festes Gelenk.

Folgende Dimensionen liegen vor:

Länge AB $= l_1 = 3000$ mm

Länge BC $= l_2 = 1800$ mm

Durchm. auf Länge l_1 : $d_1 = 100$ mm $\quad \Theta_1 = 490$ cm⁴

„ „ „ l_2 : $d_2 = 120$ mm $\quad \Theta_2 = 1000$ cm⁴

Als Kräfte kommen zur Wirkung:

in A: $P_1 = 30000$ kg

in B: $P_2 = 30000$ kg

in C: $P = -60000$ kg

Der Längenmaßstab beträgt 1 : 10. Die Verzerrung der anfänglichen Ordinaten ist eine 1000fache. Zwischen A und B wird die elastische Linie direkt als Momentenlinie aufgefaßt, während zwischen B und C die Ordinaten zu verdoppeln sind, entsprechend der Verdoppelung der Kräfte. Der Momentenmaßstab folgt dann zu 1 mm = 30 cmkg.

Die Maßstäbe sind in der Figur eingeschrieben. Die Zahlen hinter der Bezeichnung für die elastische Linie EL geben die Verzerrung an.

Zuerst denken wir uns die Stütze B entfernt und suchen nach dem Mohr'schen Verfahren die elastische Linie

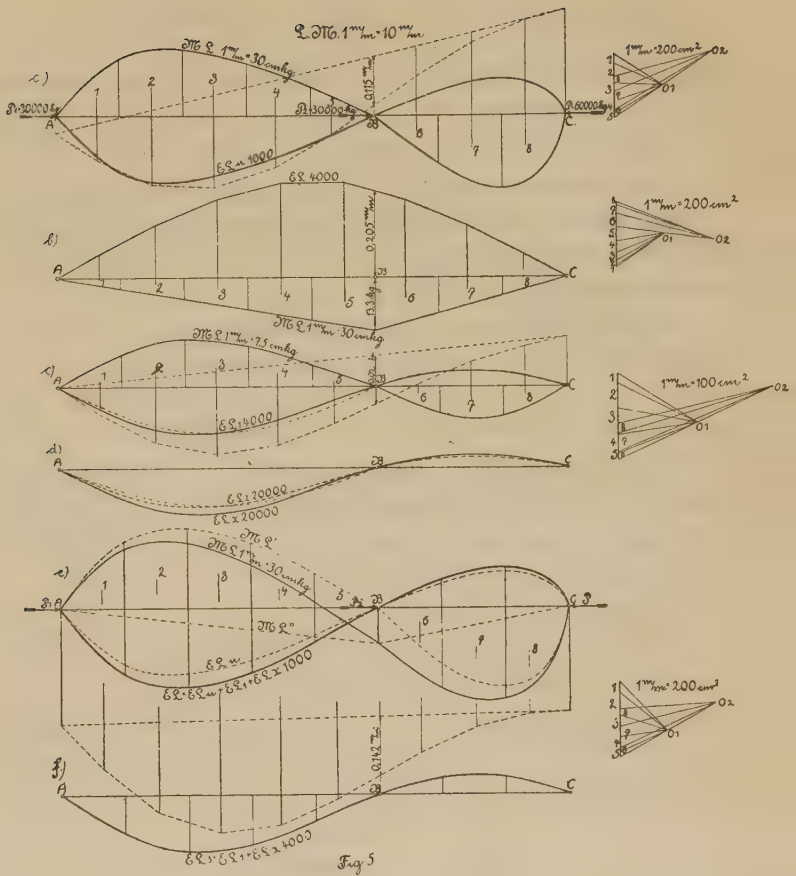


Fig 5

des Trägers auf 2 Stützen Fig. 5 a, wobei zu beachten ist, daß an der Stelle B im Kräfteplan ein Polwechsel eintritt, entsprechend der Aenderung des Trägheitsmomentes und des Horizontalzuges:

$$H_{II}^{1} = \frac{E \cdot \Theta_1}{H_I^{1}} = \frac{22 \cdot 10^5 \cdot 490}{30} = 36 \cdot 10^6\,\text{cm}^2$$

$$H_{II}^{2} = \frac{E \cdot \Theta_2}{H_I^{2}} = \frac{22 \cdot 10^5 \cdot 10^3}{30} = 734 \cdot 10^5\,\text{cm}^2$$

Als Flächenmaßstab wählt man praktisch 1 mm = 200 cm² wodurch dann eine 4000 fache Verzerrung bedingt wird.

Punkt B ist auf der Horizontalen festgehalten und die Stabmittellinie muß soweit zurückgebogen werden, bis

B seine richtige Lage bekommt. Dazu bringt man in B eine Einzelkraft von bekannter Größe an (= 13,3 kg). In A und C treten dabei Auflagerkräfte auf (A = — 5 kg, C = — 8,3 kg). Nach aufwärts gerichtete Kräfte erhalten positives Vorzeichen.

Die Momentenfläche hat Dreiecksform und ist in Fig. 5 b zu erkennen. Nach Feststellung der entsprechenden elastischen Linie kann die Verschiebung des Punktes B = 0,205 mm herausgemessen werden.

Bei dem 1. Belastungsfall erfuhr er eine Durchsenkung von 0,115 mm. Mit dem Verhältnis beider Strecken $\frac{0{,}115}{0{,}205} = 0{,}561$ sind die Ordinaten der 2. Linie zu multiplizieren und von denen der ersten abzuziehen. Auf diese Weise entsteht die elastische Linie EL_1 in Fig. 5 c. Die zugehörigen Auflagerkräfte betragen:

$$A = -5 \cdot 0{,}561 = -2{,}8 \text{ kg}; \quad B = 13{,}3 \cdot 0{,}561 = 7{,}46 \text{ kg}$$
$$C = -8{,}3 \cdot 0{,}561 = -4{,}65 \text{ kg}$$

Da die Form der anfänglichen Krümmungslinie und die der gefundenen elastischen Linie noch ziemlich verschieden ist, wird eine weitere aus EL_1 gezeichnet (Fig. 5 d), wobei mit EL_1 so verfahren wird, wie früher mit ELu. So findet sich EL_2 in Fig. 5 d.

Die Auflagerkräfte sind:

$$A = -0{,}56 \text{ kg}; \quad B = 1{,}49 \text{ kg}; \quad C = -0{,}93 \text{ kg}.$$

Ueber die Kurven EL_1 und EL_2 wurden Sinuslinien strichpunktiert eingetragen, wodurch sich eine ziemlich gute Uebereinstimmung der Form nach zeigt, sodaß wir die Proportionalitätsbedingung einführen können.

Inhalt der Fläche unter $EL_1 = 100{,}2$ cm² und unter $EL_2 = 16{,}2$ cm² in 4000facher Verzerrung.

$$\text{Knicksicherheit } k = \frac{100{,}2}{16{,}2} = 6{,}18$$

$$ELx = \frac{EL_1 \cdot EL_2}{EL_1 - EL_2} = \frac{100{,}2 \cdot 16{,}2}{100{,}2 - 16{,}2} = 19{,}34 \text{ cm}^2$$

Der Zuwachskoeffizient mit dem die Ordinaten von EL_2 zu multiplizieren sind, wird

$$n = \frac{EL\,x}{EL_2} = \frac{19{,}34}{16{,}2} = 1{,}19$$

In Fig. 5e ist ELu + EL_1 + EL x als Resultat dargestellt. Der Einfluß der achsialen Kräfte ist leicht zu erkennen, da ELu allein punktiert eingetragen wurde.

Auflagerkräfte:

A = — (2,8 + 0,56 · 1,19) = — 3,47 kg
B = (7,48 + 1,49 · 1,19) = + 9,25 kg
C = — (4,65 + 0,93 · 1,19) = — 5,76 kg

Momentenfläche:

Maßstab 1 mm = 30 cmkg.

1. Die elastische Linie stellt eine Momentenfläche dar, wenn zwischen A und B die Ordinaten ungeändert bleiben und zwischen B und C verdoppelt werden. Der Maßstab ist entsprechend gewählt.

2. Die Auflagerung in B erzeugt eine Momentenfläche in Gestalt eines Dreiecks von der Höhe h = 34,7 mm in B.

Beide Flächen summiert liefern das Ergebnis in Fig. 5e stark ausgezogen. Die Momentenflächen werden immer auf der konkaven Seite der elastischen Linie angenommen.

Zur Kontrolle ist in Fig. 5f aus dem gefundenen Resultat eine elastische Linie konstruiert worden, die genau mit der zu ELu hinzugekommenen Krümmung übereinstimmt. Die Gleichgewichtsbedingung dürfte demnach tatsächlich erfüllt sein.

Auflagerkräfte:

A = — 3,45 kg B = 9,18 kg C = — 5,73 kg.

Also gute Uebereinstimmung mit den früheren Zahlen.

Um zu zeigen, wie wenig Einfluß die Verschiedenheit der Form der elastischen Linien hat, sollen auch noch die Werte von k, EL und n aus ELu und EL_1 berechnet werden.

Inhalt von ELu = 158,3 cm^2 von EL_1 = 25 cm^2 in 2000facher Verzerrung.

$$k = \frac{158{,}3}{25} = 6{,}33 \text{ anstatt } 6{,}18 \text{ von früher}$$

$$EL\,x = \frac{158{,}3 \cdot 25}{158{,}3 - 25} = 29{,}7 \text{ cm}^2$$

$$n = \frac{29{,}7}{25} = 1{,}186 \text{ gegen } 1{,}19 \text{ oben.}$$

Für praktische Fälle bedeutungslose Unterschiede.

Zum Schlusse der allgemeinen Betrachtungen sei noch kurz auf die rechnerische Lösung des Problems einer gekrümmten Stange mit achsialen Kräften hingewiesen*).

Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet:

$$E\Theta \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \cdot y + F(x)$$

wobei F (x) eine Funktion darstellt, die von der Anfangskrümmung abhängt.

Die Lösung der Gleichung heißt mit $\alpha = \frac{P}{E\Theta}$

$$y = A \cdot \sin \sqrt{\alpha}\, x + B \cdot \cos \sqrt{\alpha} \cdot x + f(x)$$

Die Bestimmung des Störungsgliedes f (x) dürfte nur in einzelnen Fällen gelingen, bei denen die Anfangskrümmung eine einfache Kurve darstellt. Aus diesem Grunde erhält das oben entwickelte Annäherungsverfahren volle Berechtigung, nachdem es durch einfache Mittel Ergebnisse liefert, die in praktischen Fällen weitaus genügende Genauigkeit besitzen.

---

*) Siehe Otto Mies: Das Ausknicken stabförmiger Körper. Dinglers Polytechn. Journal 1912 S. 216.

A. Kolbenstangen.

Das bisher entwickelte Verfahren kann nun dazu benützt werden den wirklichen Zustand einer Kolbenstange unter Zugrundlegung einer bestimmten Belastung zu ermitteln. Gerade bei dieser Stangenart läßt sich mit der alleinigen Kenntnis der Knicksicherheit wenig anfangen, was schon daraus zu ersehen ist, daß sie ungewöhnlich hoch, 10—20fach verlangt wird, also scheinbar auch Verhältnissen Rechnung tragen soll, über die man sich nicht im Klaren befindet. Die Durchbiegungen unter dem Einflusse aller Arten von Belastungen besonders bei Stangen mit getragenem Kolben, die Gefahr des Warmlaufens der Gleitlager, des Kreuzkopfes und dergl. spielen eine ausschlaggebende Rolle angesichts der gesteigerten Geschwindigkeiten. Wir müssen danach trachten auch diesen Gefahren nachzuspüren, soweit die Möglichkeit gegeben ist und nicht aus traditionellen Gründen unser ganzes Vertrauen auf die unsicheren Knickungserscheinungen setzen.

Den wirklichen Zustand aufzufinden, dürfte meistens ein vergebliches Bemühen darstellen wegen der Unbestimmtheit der Auflagerbedingungen. Jedoch lassen sich Grenzfälle angeben, die ihn ziemlich enge einschließen und einen Schluß auf das tatsächliche Verhalten zulassen. Als solche Grenzfälle kommen im folgenden in Betracht:

1. Gelenkartige Auflagerung der Stange an allen Stützpunkten.
2. Einspannung an gewissen Stellen, die eine solche in gewissem Grade erwarten lassen.

Die Unterstützungspunkte der Stangen werden angenommen im Kreuzkopf-, Lager- und Kolbennabenmittel, dabei werden die Stangenenden, die durch Spannungsverbindungen mit den Stützkörpern vereinigt sind, sowie

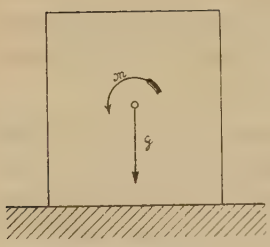
die Teile derselben bis zum Auflagerpunkt als starr betrachtet (Trägheitsmoment $\Theta = \infty$). In den Kräfteplänen kommt dies darin zum Ausdruck, daß der Pol für diesen Abschnitt ins Unendliche rückt.

Ferner sei vorausgesetzt, daß am Kreuzkopf keine Momente infolge der Reibungskräfte auf die Stange übertragen werden. Dem Reibungsmoment wirkt in jedem Augenblicke meist ein größeres Moment entgegen aus dem Kreuzkopfdrucke auf die Gleitbahn mal dem Abstande der Kreuzkopfmitte von der Kante, um welche eine Drehung erfolgen müßte, sodaß ein Abheben nicht eintreten kann.

Nach diesen Voraussetzungen kann dazu übergegangen werden, den Einfluß der nichtachsialen Kräfte zu bestimmen und dann den der Zug- und Druckbelastungen zu untersuchen, wie früher gezeigt wurde. Liegen dann Momentenverteilung und elastische Linie fest, so sind wir in der Lage auch über die Flächenpressungen an den Stützkörpern unter gewissen Voraussetzungen Angaben zu machen. Dieser Möglichkeit ist eine hervorragende Bedeutung beizumessen, nachdem hier meistens zu günstige Bedingungen zugrunde gelegt werden, nämlich gleichmäßige Verteilung des Auflagerdruckes über die ganze Sitzfläche. Der Fall gleichmäßiger Druckverteilung mag wohl als unterer Grenzfall in Frage kommen. In Wirklichkeit erhöhen Reibungs- und Einspannmomente die Werte nach den Kanten der Stützkörper hin ganz bedeutend. Ueber die Bestimmung der Verteilung der Auflagerdrücke an einem Körper mit Querschnittabmessungen, die eine Verbiegung nicht zulassen, wie z. B. Kreuzkopf oder Kolben mit Gleitschuhen, seien einige allgemeine Betrachtungen vorausgeschickt.*)

An dem Körper in Fig. 6 greife eine Kraft G und ein Moment M an. Der Druck auf die Unterlage kann dementsprechend in zwei Teile zerlegt werden, in je einen Teil von G und von M herrührend. Das Gewicht G erzeugt einen über die ganze Fläche gleichmäßig verteilten

*) C. Bach. Elastizität und Festigkeit S. 389.



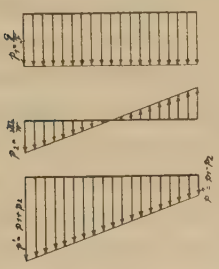


Fig 6.

Druck $p_1 = \frac{G}{F}$, wenn F die Sitzfläche bedeutet. M würde allein auf der einen Hälfte der Fläche Druck- und auf der anderen Zugspannungen veranlassen.

Setzt man eine geradlienige Druckverteilung voraus, so kann man mit gewisser Genauigkeit die gewöhnliche Biegungsgleichung anschreiben; vor allem da wir es hier nur mit ganz kleinen Kräften zu tun haben:

$$p_2 = \frac{M}{W}$$

wenn W das Widerstandsmoment des aufsitzenden Querschnittes darstellt. In der Figur ist der Druckverlauf für die beiden Fälle getrennt wiedergegeben und dann zum Endresultat zusammengesetzt.

Etwas umständlicher gestaltet sich die Bestimmung der Druckverteilung, sobald sich an einer Kante Zugspannungen ergeben würden, was eintreten kann, wenn der Einfluß des Momentes größer wird. (Tritt nur selten ein).

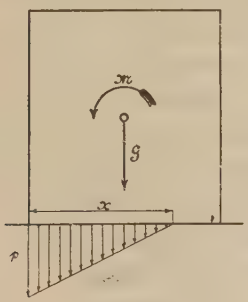


Fig 7

Die Flächenpressungen verteilen sich nur auf eine gewisse Strecke x der Grundfläche Fig. 7 und sind von folgender Größe:

$$p = \frac{G}{b \cdot x} + p_2 \qquad 4.)$$

wobei p_2 den Anteil der Spannung infolge von Momenten bedeutet. Nach der Biegungsgleichung muß dann sein, wenn a und b die Flächenseiten darstellen:

$$M - G\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{6} b \cdot x^2 \cdot p_2$$

$$p_2 = \frac{6\,M - 6\,G\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)}{b \cdot x^2}$$

Mit der obigen Gleichung für p ergibt sich:

$$p = \frac{6\,M}{b \cdot x^2} - \frac{3\,G \cdot a}{b \cdot x^2} + \frac{4\,G}{x} \qquad 5.)$$

Im Abstande x von der linken Kante lautet die Gleichung:

$$o = \frac{G}{b \cdot x} - p_2$$

oder

$$o = \frac{G}{b \cdot x} - \frac{6\,M}{b \cdot x^2} + \frac{3\,G \cdot a}{b \cdot x^2} - \frac{3\,G}{bx}$$

daraus berechnet sich:

$$x = \frac{3}{2}\,a - 3\,\frac{M}{G}.$$

Durch Einsetzen in Gleichung 5 folgt die Größe für p an der linken Kante.

Die Anwendung der gefundenen Ergebnisse soll an einigen typischen Beispielen im folgenden gezeigt werden. In jedem Falle sind andere Betrachtungen nötig, weil die Einflüsse der nichtachsial gerichteten Wirkungen sehr mannigfaltige sein können. Zur Behandlung kommt eine Stange mit getragenem und eine solche mit aufsitzenden Kolben.

1. Kolbenstange einer Einzylindermaschine mit getragenem Kolben.

Die Stange, wie sie in Fig. 8 schematisch wiedergegeben ist, erfährt in jedem Augenblicke einer Umdrehung der Kurbel eine andere Beanspruchung, da die Stangenlänge fortwährend wechselt und auch die Kräfte schwanken. Um ein richtiges Bild zu erhalten, wird für diesen Fall die Untersuchung bei verschiedenen Stellen eines Hin- und Rückganges durchgeführt. Für die Stellung des Kolbens bei 75 % des Hubes wird im folgenden die Unter-

suchung näher erläutert. Für die anderen Stellungen werden die Resultate angegeben.

Die behandelte Stange gehört einer Lokomotiv-Dampfmaschine mit einem Zylinderdurchmesser von 550 mm und einem Hub von 660 mm an. Der maximale Dampfdruck beträgt 13 Atm. Die Maschine soll sich im Anfahrzustand befinden, wobei bis zu 78 % des Hubes der volle Kesseldruck auf dem Kolben lastet.

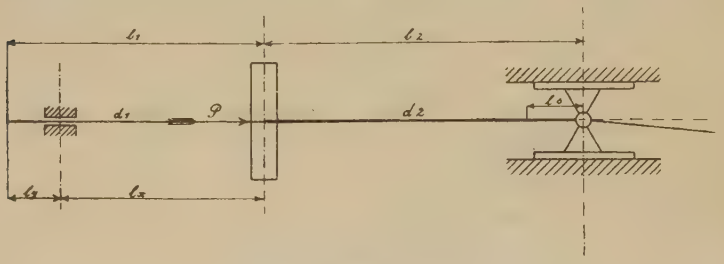


Fig. 8.

Die Dimensionen der Stange mit den in Fig. 8 eingeschriebenen Bezeichnungen sind folgende:

$l_2 = 1490$ mm; $l_1 = 1210$ mm; $l\,x = 962{,}5$ mm;
$l\,y = 247{,}5$ mm.

Länge des unverbiegbaren Stangenteiles am Kreuzkopf
$l\,s = 315$ mm

$d_1 = 60$ mm entsprechend $\Theta_1 = 63{,}62$ cm^4
$d_2 = 90$ mm „ $\Theta_2 = 322{,}1$ cm^4

Stangengewicht pro 1 cm Länge:
$\gamma_1 = 0{,}22$ kg; $\gamma_2 = 0{,}5$ kg.

Gewicht des Kolbenkörpers:
$G = 88$ kg.

Durchmesser des Kolbens:
$D = 546$ mm.

Dampfdruck auf den Kolben $P = 30000$ kg.

A. Hingang (Druckkräfte).

a) Gelenkartige Auflagerung der Stange.

Die Abstützung erfolgt am Kreuzkopf und am hinteren Gleitlager. Die Stopfbüchsen vermögen der Stange keine Unterstützung zu gewähren.

Die Beanspruchung des an 2 Stellen gelagerten Trägers erfolgt:

1. durch das Eigengewicht
2. durch das Gewicht des Kolbens und
3. durch den Dampfdruck auf den Kolben.

1. Einfluß des Eigengewichtes und der Kolbenlast.

In Fig. 9a ist mit Hilfe der Lehren vom Seileck die Momentenfläche aufgesucht, indem zuerst jeder Be-

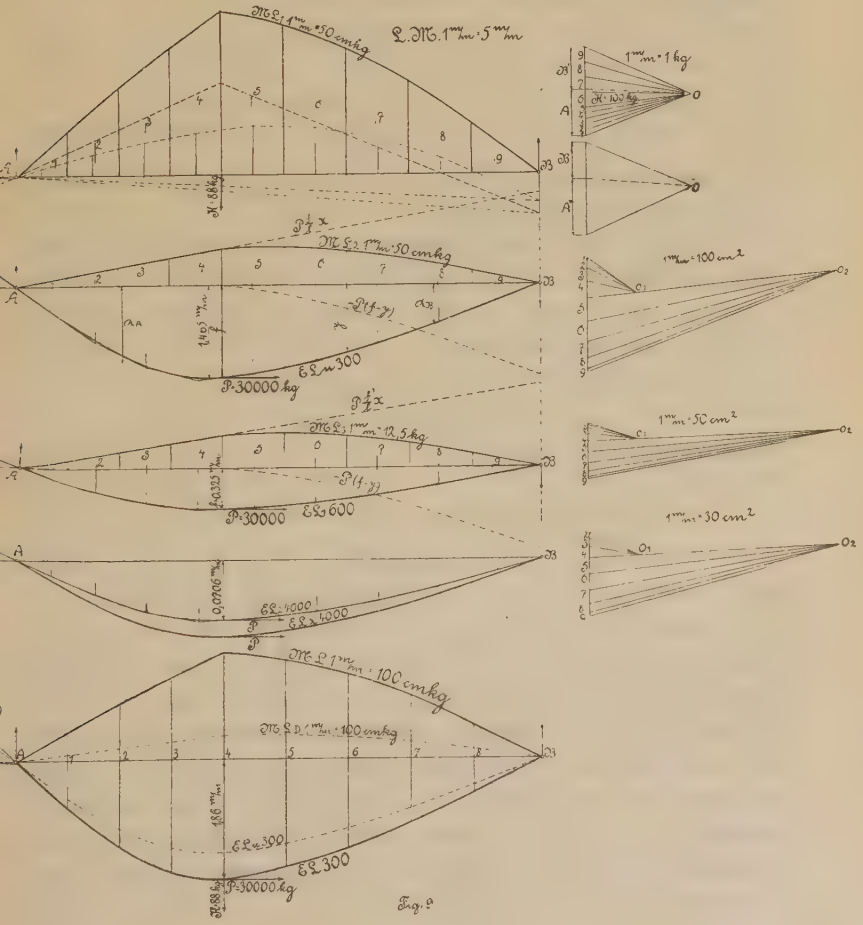


Fig. 9

lastungsfall für sich behandelt wurde und dann beide summiert wurden. Die Maßstäbe sind auf der Figur zu ersehen.

Die Auflagerkräfte können aus den Kräfteplänen herausgemessen werden zu:

$$A\,g = 44{,}3 + 53{,}5 = 97{,}8 \text{ kg}$$
$$B\,g = 40{,}5 + 34{,}5 = 75 \text{ „}$$

Durch Zerlegen der Momentenfläche in die, in der Figur zu erkennenden Trapezflächen läßt sich nach dem Mohr'schen Verfahren die elastische Linie in Fig. 9 b honstruieren, wenn die Horizontalzüge des 2. Kräfteplanes berechnet werden zu:

$$H_{II}^{1} = \frac{E\,\Theta_1}{H_I^{1}} = \frac{22 \cdot 10^5 \cdot 63{,}62}{100} = 14 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$$

$$H_{II}^{2} = \frac{E\,\Theta_2}{H_I^{2}} = \frac{22 \cdot 10^5 \cdot 322}{100} = 708 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$$

als Flächenmaßstab 1 mm = 100 cm² und als Verzerrung eine 300fache gewählt wird.

Die größte Durchbiegung der Stange unter dem Einflusse des Eigengewichtes und der Kolbenlast folgt aus der elastischen Linie zu f = 1,465 mm und die Neigung der Endtangenten:

bei A zu: $\operatorname{tg} \alpha_A = -0{,}72$ und bei B zu:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = -0{,}38$$

bei 300facher Verzerrung.

2. Einfluß des Kolbendruckes.

Die verbogene Stabmittellinie ELu kann hier nicht ohne weiteres als Momentenlinie aufgefaßt werden, da die Kraft P = 30000 kg im Abstande f von der geraden Stabachse angreift (Fig. 9b). Sie erzeugt ein negatives Moment, gemäß der Annahme, daß alle Momente, die im Uhrzeigersinne drehen, positiv, alle diejenigen, die entgegengesetzt drehen, negativ einzuführen sind. Um an der Stange den Gleichgewichtszustand herbeizuführen, müssen in A und B Auflagerkräfte A und B entstehen, die ein positives gleichgroßes Moment hervorrufen. Daraus folgt:

$$A_1 \cdot (l_2 + l\,x) = -B_1 \cdot (l_2 + l\,x) = M = P \cdot f$$

$$A_1 = \frac{P \cdot f}{l_2 + l\,x} = \frac{30000 \cdot 0{,}1465}{245{,}25} = 17{,}9 \text{ kg}$$

$$B_1 = = -17{,}9 \text{ kg}$$

Für das Vorzeigen der Kräfte gilt das auf Seite 15 gesagte. Zur Feststellung der Momentenfläche, die infolge der Achsialkraft entsteht, betrachten wir von A ausgehend die links von den aufeinanderfolgenden Querschnitten wirkenden Kräfte und erkennen: die Kraft A bringt als Momentenfläche ein Dreieck hervor, mit der Höhe P · f in B. Die Kolbenkraft erzielt in einem Querschnitt der um y von der geraden Stabachse entfernt ist ein Moment $M = -P \cdot (f-y)$. Bildet man für jeden Querschnitt dieses Produkt, so erhält man in Fig. 9b die strichpunktiert gezeichnete Kurve. Die Summierung beider Linien liefert als Endergebnis den Momentenverlauf ML_2. Der Momentenmaßstab wird angenommen zu 1 mm = 50 cmkg. Er ist so gewählt, daß die Ordinaten der in 300facher Verzerrung gezeichneten elastischen Linie gleichzeitig Ordinaten der Momentenlinie sind.

Wie oben wurde in Fig. 9c aus ML_2 eine elastische Linie EL_1 konstruiert. Aus EL_1 findet sich in gleicher Weise wie früher eine Momentenlinie, der ein Maßstab 1 mm = 12,5 cmkg zu Grunde gelegt ist. Dabei müssen die in 600facher Verzerrung dargestellten Ordinaten der elastischen Linie verdoppelt werden, um diejenigen der Momentenlinie zu erhalten.

Auflagerkräfte:

$$A_2 = \frac{P \cdot f'}{l_2 + l\,x} = \frac{30000 \cdot 0{,}0325}{245{,}25} = 3{,}975 \text{ kg}$$

$$B_2 = = -3{,}975 \text{ kg}$$

Weiterhin wird die in Fig. 9d wiedergegebene Linie EL_2 gezeichnet. Aus der Veränderung der Verzerrung von einer 600 zu einer 4000fachen ist zu ersehen, daß sich die Krümmungen ziemlich schnell dem Werte 0 nähern.

Die Planimetrierung der Flächen zwischen elastischer Linie und gerader Stabachse liefert:

$EL_1 = 119\ cm^2$ und $EL_2 = 26{,}2\ cm^2$
in 600facher Verzerrung.

Knicksicherheit:

$$k = \frac{119}{26{,}2} = 4{,}54$$

$$EL\,x = \frac{119 \cdot 26{,}2}{119 - 26{,}2} = 33{,}6\ cm^2$$

Zuwachskoeffizient:

$$n = \frac{33{,}6}{26{,}2} = 1{,}282$$

EL x ist in Fig. 9d über EL_2 eingetragen. Aus der ursprünglichen Verbiegungslinie und EL_1 seien noch die Werte von k und n berechnet:

Inhalt von ELu = 523 cm^2 von $EL_1 = 119\ cm^2$ damit wird:

$$k = \frac{523}{119} = 4{,}4$$

$$EL\,x = \frac{523 \cdot 119}{523 - 119} = 154\ cm^2$$

$$n = 1{,}294$$

Die Abweichungen von den genauen Werten sind unbedeutend.

Die elastischen Linien ELu EL_1 und EL x sind in Fig. 9e zusammen addiert und geben die endgültige Krümmungslinie der Kolbenstange. Die größte Durchbiegung beträgt f = 1,86 mm gegenüber 1,46 mm bei der Betrachtung ohne Berücksichtigung des Kolbendruckes (S. 24). Mithin beträgt der Einfluß der Achsialkräfte auf die Durchbiegung 21 %, ist also nicht zu vernachlässigen.

Die resultierende Momentenfläche ist in Fig. 9e ebenfalls im Maßstabe 1 mm = 100 cmkg eingezeichnet. Auch hier wurde der Einfluß der Druckkräfte durch Eintragen der von ihnen allein herrührenden Momentenlinien (gestrichelt gezeichnet) gekennzeichnet.

Auflagerkräfte: Sie werden auch durch Summierung der Teilresultate erhalten:

$$A = 97{,}8 + 17{,}9 + 3{,}975 \cdot 1{,}281 = 120{,}8 \text{ kg.}$$
$$B = 75 - 17{,}9 - 3{,}975 \cdot 1{,}281 = 52 \text{ „}$$

Materialbeanspruchung der Kolbenstange.

Sie setzt sich bei dem Stangenteil zwischen Kolben und Kreuzkopf aus Druck- und Biegungsspannungen zusammen. Die letzteren können zerlegt werden in solche die durch Achsialkräfte und solche, die durch anders geartete Belastungen erzeugt werden.

$$\sigma_2 = \frac{P}{F_2} + \frac{M_1}{W_2} + \frac{M_2}{W_2}$$

F_2 = Stangenquerschnitt in cm^2. W_2 = Widerstandsmoment in cm^3, M_1 und M_2 sind die aus den gefundenen Kurven zu entnehmenden Momente, wobei M_2 den Anteil der Druckkräfte angibt. An der Stelle, wo das Maximalmoment auftritt, wird:

$$\sigma_2 = \frac{30000}{63{,}6} + \frac{7800}{71{,}6} + \frac{2200}{71{,}6} = 472 + 109 + 30{,}7$$
$$= 611{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

Bei dem übrigen Stangenteil fällt die Druckbeanspruchung weg:

$$\sigma_1 = \frac{M_1 + M_2}{W_1} = \frac{7800 + 2200}{21{,}2} = 368 + 104$$
$$= 472 \text{ kg/cm}^2$$

Daß nach Festlegung der Momentenverteilung der Spannungsverlauf über die ganze Stangenlänge ohne weiteres bekannt ist, bedarf keiner besonderen Erwähnung.

b) Einspannung am Kreuzkopf und Gleitlager.*)

Wird vollkommene Einspannung vorausgesetzt, so müssen die Endtangenten der elastischen Linie an den betreffenden Stellen mit der horizontalen Stabachse zu-

*) Erscheint die Annahme einer vollständigen Einspannung am Gleitlager als zu weitgehend, so kann eine solche nur am Kreuzkopf vorausgesetzt werden, wo sicher zurückbiegende Momente auf die Stange übertragen werden, wenn auch keine vollkommene Einspannung vorhanden ist. Die Untersuchung soll hier für den allgemeinen schwierigeren Fall durchgeführt werden.

sammenfallen, eine Bedingung, die in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, aber als Grenzfall angenommen werden kann. Das System weist dann eine 2fache statische Unbestimmtheit auf und unsere Aufgabe wird es sein, die an den Enden auftretenden Momente zu ermitteln. Wie früher kommen wieder 2 Belastungsfälle in Betracht.

1. Einfluß des Eigen- und Kolbengewichtes.

Für gelenkartige Auflagerung wurden bereits in Fig. 9a und b Momentenfläche und elastische Linie ermittelt. Nun müssen wir die Momente bestimmen, welche die Neigungswinkel der Endtangenten zu Null machen. Hierzu führen wir an den Lagerstellen Einheitsmomente ein, die gewisse Beziehungen liefern, aus denen dann die zu suchenden Größen berechnet werden können.

Es bedeutet:

M_A^0 Einheitsmoment in A
M_B^0 „ „ B
M_A unbekanntes Moment in A
M_B „ „ „ B
α_A Neigung der Tangente bei A infolge der wirkenden Kräfte bei gelenkartiger Lagerung
α_B Neigung der Tangente bei B infolge der wirkenden Kräfte bei gelenkartiger Lagerung
β_A^0 Neigung der Tangente bei A infolge des Einheitsmomentes in A
β_B^0 Neigung der Tangente bei B infolge des Einheitsmomentes in A
γ_A^0 Neigung der Tangente bei A infolge des Einheitsmomentes in B
γ_B^0 Neigung der Tangente bei B infolge des Einheitsmomentes in B

β_A, β_B, γ_A, γ_B die entsprechenden Neigungen infolge der unbekannten Momente.

Anstelle der Winkel werden die Tangenten eingeführt. Mit Berücksichtigung der Proportionalitätsbeziehungen zwischen elastischen Linien und Belastungen und der oben

erwähnten Bedingung, daß die Endtangenten in A und B bis zur geraden Stabachse zurückgebogen werden müssen, ergeben sich die Gleichungen:

$$1.)\quad \frac{M_A^0}{M_A} = \frac{\beta_A^0}{\beta_A} \qquad 3.)\quad \frac{M_A^0}{M_A} = \frac{\beta_B^0}{\beta_B}$$

$$2.)\quad \frac{M_B^0}{M_B} = \frac{\gamma_A^0}{\gamma_A} \qquad 4.)\quad \frac{M_B^0}{M_B} = \frac{\gamma_B^0}{\gamma_B}$$

$$5.)\quad \alpha_A + \beta_A + \gamma_A = 0$$

$$6.)\quad \alpha_B + \beta_B + \gamma_B = 0$$

Aus diesen 6 Unbekannten bestimmt sich eine davon, etwa

$$\beta_A = \frac{\beta_A^0\,(\gamma_B^0 \cdot \alpha_A - \gamma_A^0 \cdot \alpha_B)}{\beta_B^0 \cdot \gamma_A^0 - \beta_A^0 \cdot \gamma_B^0}$$

Die andern Unbekannten folgen nun durch Einsetzen in obige Gleichungen.

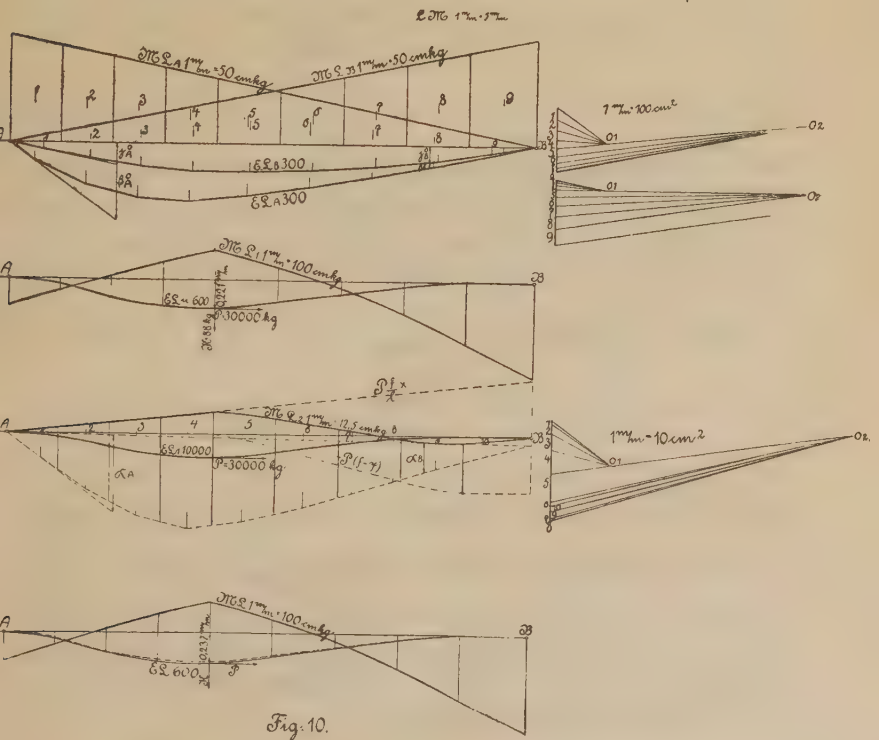


Fig. 10.

Im vorliegenden Beispiel ist für $M_A^0 = 5000$ cmkg und für $M_B^0 = -5000$ cmkg eingeführt. Die Momentenflächen sind Dreiecke, die in Fig. 10a mit einem Maßstab 1 mm = 50 cmkg dargestellt wurden. In bekannter Weise sind die elastischen Linien in 300facher Verzerrung ermittelt. Aus der Figur können folgende Werte herausgemessen werden:

$$\beta_A^0 = -0{,}71;\ \beta_B^0 = -0{,}20;\ \gamma_A^0 = -0{,}20;\ \gamma_B^0 = -0{,}155$$

Früher wurde gefunden:

$$\alpha_A = -0{,}72;\ \alpha_B = -0{,}38$$

Mit diesen Größen ergibt sich:

$$\beta_A = \frac{-0{,}71\ (0{,}155 \cdot 0{,}72 - 0{,}2 \cdot 0{,}38)}{0{,}2 \cdot 0{,}2 - 0{,}71 \cdot 0{,}155} = 0{,}36$$

Aus Gleichung 5:

$$\gamma_A = -\alpha_A - \beta_A = 0{,}72 - 0{,}36 = 0{,}36$$

1a.) $$M_A' = M_A^0 \cdot \frac{\beta_A}{\beta_A^0} = \frac{5000 \cdot 0{,}36}{-0{,}71} = -2525 \text{ cmkg}$$

2a.) $$M_B' = M_B^0 \frac{\gamma_A}{\gamma_A^0} = \frac{-5000 \cdot 0{,}36}{-0{,}2} = 9000 \text{ cmkg}$$

Hiermit sind die gesuchten Einspannmomente bekannt. Zur Kontrolle der Richtigkeit der Rechnung werden auch noch die anderen Winkel berechnet, deren Summe gleich dem Werte von α_B sein muß.

$$\beta_B = \frac{M'_A}{M_B^0}\ \beta_B^0 = \frac{-2535}{5000} \cdot (-0\,2) = 0{,}1015$$

$$\gamma_B = \frac{M'_B}{M_B^0}\ \gamma_B^0 = \frac{9000}{-5000} \cdot (-0{,}155) = 0{,}279$$

$$\beta_B + \gamma_B = 0{,}3805 = \alpha_B$$

Die Ordinaten der elastischen Linien aus den Einheitsmomenten werden mit dem Verhältnis $\frac{M'_A}{M_A^0}$ bezw. $\frac{M'_B}{M_B^0}$ multipliziert und mit den Ordinaten der elastischen Linie in Fig. 9b summiert, wodurch dann in Fig. 10b die Verbiegungslinie ELu entsteht. Die Momentenflächen sind in der gleichen Weise zu behandeln.

2. Einfluß des Dampfdruckes.

Mit der im vorigen Abschnitte gefundenen elastischen Linie ELu Fig. 10b wird genau so wie früher verfahren, indem daraus die Momentenfläche und aus ihr eine neue Verbiegungslinie konstruiert wird, deren Endtangenten zurückgedreht werden.

Auflagerkräfte infolge des exzentrischen Kraftangriffes:

$$A' = \frac{P \cdot f}{l_2 + l_x} = \frac{30000 \cdot 0{,}0221}{245{,}25} = 2{,}7 \text{ kg}$$

$$B' = -\frac{P \cdot f}{l_2 + l_x} = \qquad\qquad = -2{,}7 \text{ kg}$$

Aus der elastischen Linie bei gelenkartiger Lagerung (Fig. 10c) können

$$\alpha_A = -0{,}73 \cdot \frac{300}{10000} = -0{,}0219 \text{ und}$$

$$\alpha_B = -0{,}28 \cdot \frac{300}{10000} = -0{,}0084$$

herausgemessen werden.

Von früher kennt man:

$\beta_A = -0{,}71$; $\beta_B = -0{,}20$; $\gamma_A = -0{,}20$; $\gamma_B = -0{,}155$

Alle Winkel sind in 300facher Verzerrung angegeben.

$$\beta_A = \frac{-0{,}71\ (0{,}155 \cdot 0.0219 - 0{,}2 \cdot 0{,}0084)}{0{,}2 \cdot 0{,}2 - 0{,}71 \cdot 0{,}155} = 0{,}01735$$

$$\gamma_A = -\alpha_A - \beta_A = 0{,}0219 - 0{,}01735 = 0{,}00455$$

$$M''_A = M_A{}^0 \cdot \frac{\beta_A}{\beta_A{}^0} = \frac{5000 \cdot 0{,}01735}{-0{,}71} = -122 \text{ cmkg}$$

$$M''_B = M_B{}^0 \cdot \frac{\gamma_A}{\gamma_A{}^0} = \frac{-5000 \cdot 0{,}00455}{-0{,}2} = 114 \text{ cmkg}$$

$$\beta_B = \frac{-122}{5000} \cdot (-0{,}2) = 0{,}00488$$

$$\gamma_B = \frac{114}{5000} \cdot 0{,}155 = 0{,}00353$$

$$\beta_B + \gamma_B = 0{,}00841 = \alpha_B$$

Mittels der soeben gefundenen Einspannmomenten wurde in Fig. 10c die ausgezogene elastische Linie EL_1 erhalten. Die Konstruktion einer weiteren Linie ist nicht erforderlich, da ELu und EL_1 der Form nach gut übereinstimmen.

Inhalt von ELu = 58 cm² und von EL_1 = 2,76 cm² daraus:

$$k = \frac{58}{2{,}76} = 21;\quad EL\,x = \frac{58 \cdot 2{,}76}{58 - 2{,}76} = 2{,}9$$

$$n = 1{,}05$$

Mit Hilfe des Zuwachskoeffizienten n ist in Fig. 10d das Endresultat gefunden. Der Einfluß der Druckkräfte ist nicht bedeutend.

Einspannmomente infolge des Dampfdruckes.

$$M''_A = -122 \cdot 1{,}05 = -128 \text{ cmkg}$$
$$M''_B = \quad 114 \cdot 1{,}05 = \quad 120 \text{ cmkg.}$$

Gesamte Einspannmomente:

$$M_A = M'_A + M''_A = -2530 - 128 = -2658 \text{ cmkg}$$
$$M_B = M'_B + M''_B = \quad 9000 + 120 = \quad 9120 \text{ „}$$

Auflagerkräfte:

Sie werden hervorgerufen durch das Eigen- und Kolbengewicht, durch die Einspannmomente und den exzentrisch wirkenden Kolbendruck.

$$A = Ag + \frac{M_A}{l_2 + l\,x} - \frac{M_B}{l_2 + l\,x} + \frac{P \cdot f}{l_2 + l\,x} \cdot n$$

$$= 97{,}8 + \frac{2658}{245{,}25} - \frac{9120}{245{,}25} + 2{,}7 \cdot 1{,}05 = 74{,}23 \text{ kg}$$

$$B = Bg - \frac{M_A}{l_2 + l\,x} + \frac{M_B}{l_2 + l\,x} - \frac{P \cdot f}{l_2 + l\,x} \cdot n$$

$$= 75 - \frac{2658}{245{,}25} + \frac{9120}{245{,}25} - 2{,}7 \cdot 1{,}05 = 98{,}57 \text{ kg}$$

B. Rückgang (Zugkräfte).

a) Gelenkartige Auflagerung der Stange.

Die Vorzeichen der von den achsialen Kräften herrührenden Wirkungen kehren sich um. Die früheren Ergebnisse können hier benützt werden.

$$EL\,x = \frac{EL_1 \cdot EL_2}{EL_1 + EL_2} = 21{,}5 \text{ cm}^2$$

Der Zuwachskoeffizient:

$$n' = 0{,}82$$

Nur die Ermittelung der Auflagerkräfte ist hier von Bedeutung:

$$A = -97{,}8 - (17{,}9 - 3{,}975 \cdot 0{,}82) = 83{,}15 \text{ kg}$$
$$B = 75 + (17{,}9 - 3{,}975 \cdot 0{,}82) = 89{,}65 \text{ kg}$$

Die Berechnung der Durchbiegungen und der Materialbeanspruchungen hat hier kein Sinn, da sie jedenfalls geringer ausfallen wie früher.

b) Einspannung am Kreuzkopf und Gleitllager.

$$EL\,x = \frac{58 \cdot 2{,}76}{58 + 2{,}76} = 2{,}64 \text{ cm}^2$$

$$n' = 0{,}955$$

Einspannmomente:

$$M_A = -2530 + 0{,}955 \cdot 122 = -2415 \text{ cmkg}$$
$$M_B = 9000 - 0{,}955 \cdot 114 = +8891 \text{ cmkg}$$

Auflagerkräfte:

$$A = Ag + \frac{M_A}{l_2 + lx} - \frac{M_B}{l_2 + lx} - \frac{P \cdot f}{l_2 + lx} \cdot n'$$

$$= 97{,}8 + \frac{2415}{245{,}25} - \frac{8891}{245{,}25} - 2{,}7 \cdot 0{,}955 = 68{,}8 \text{ kg.}$$

$$B = Bg - \frac{M_A}{l_2 + lx} + \frac{M_B}{l_2 + lx} + \frac{P \cdot f}{l_2 + lx} \cdot n' =$$

$$= 75 - \frac{2415}{245{,}25} + \frac{8891}{245{,}25} + 2{,}7 \cdot 0{,}955 = 104 \text{ kg.}$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit denen des Hinganges, so stellen sich besonders bei der gelenkartigen Lagerung beträchtliche Unterschiede in der Verteilung der Auflagerkräfte heraus.

Flächenpressungen.

Nachdem der Belastungszustand der Kolbenstange genau bekannt ist, lassen sich auch über die Größe und Verteilung der Flächendrücke an den Führungsstellen Angaben aufstellen. Wenn sie auch keinen Anspruch auf Genauigkeit machen können, wegen mancher ungeklärter Umstände (Unkenntnis des Druckverteilungsgesetzes, Beschaffenheit des Materials, Ungenauigkeiten in der Ausführung), so können doch unter Zugrundlegung gewisser Gesetzmäßigkeiten wenigstens vergleichbare Resultate gewonnen werden.

In dem vorliegenden Beispiele erregt der Verlauf der Pressungen an bestimmten Stellen, wo sie im Maximum auftreten, d. i. an den Kanten der Gleitflächen, Interesse. Es sind sehr starke Druckschwankungen und damit ständige Formänderungen, ein fortwährendes Verschieben des Materials zu erwarten. Daher soll die Verfolgung der Flächendrücke an den meist gefährdeten Stellen während einer ganzen Kurbelumdrehung im folgenden versucht werden, um den Unterschied erkennen zu lassen zwischen der gewöhnlich vorausgesetzten gleichmäßigen Druckverteilung und der mit anderen genaueren Annahmen berechneten.

Die Berechnung wird für die Kolbenstellung bei 70 % des Hubes näher durchgeführt.

1. Flächenpressung am Kreuzkopf.

Notwendige Konstruktionsdaten:

Länge der Gleitschuhe $a = 460$ mm

Breite „ „ $b = 100$ mm

Abstand der Gleitfläche vom Kreuzkopfmittel $h = 165$ mm

Gewicht des Kreuzkopfes $G_{kr} = 115{,}75$ kg

Gewicht der halben Triebstange $G_T = 110$ kg

Komponente des Triebstangendruckes $T = 3050$ kg

A. Hingang.

a) Gleichmäßige Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung.

Diese Annahme entspricht der gewöhnlich gebräuchlichen. Der Gesamtdruck auf die Gleitfläche setzt sich zusammen aus: dem Triebstangendruck — dem Kreuzkopf — dem halben Triebstangengewicht und dem früher gefundenen Auflagerdruck B. Die letzteren Belastungen sind abzuziehen, da wir es mit einer Lokomotivmaschine zu tun haben, bei der bei Vorwärtsfahrt die obere Gleitbahn belastet wird.

$$D = T - (G_{kr} + G_T + B) = 3050 - (225{,}75 + 52) = 2772{,}25 \text{ kg.}$$

Gleitfläche $F_{kr} = a \cdot b = 46 \cdot 10 = 460 \text{ cm}^2$

Flächendruck:

$$p = \frac{2772{,}25}{460} = 6 \text{ kg/cm}^2$$

Der Wert ist ziemlich hoch und nur bei Lokomotiven zulässig.

b) Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung unter Berücksichtigung des Einflusses der Reibung.

Die Annahme unter a), die allgemein der Berechnung zugrunde gelegt wird, kann in Wirklichkeit niemals erfüllt sein, da stets Reibungen auftreten, die große Bedeutung für die Druckverteilung gewinnen, wie folgende Ergebnisse beweisen.

Als Reibungskoeffizient für Gußeisen auf Gußeisen wird $\mu = 0{,}15$ eingeführt.

Druck auf die obere Gleitbahn $D = 2772{,}25$ kg. Dementsprechend gleichmäßig verteilter Druck $p_1 = 6 \text{ kg/cm}^2$.

Moment der Reibung:

$$M_R = 2772{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 16{,}5 = 6860 \text{ cmkg.}$$

Zur Bestimmung des Flächendruckes wenden wir die auf Seite 20 erwähnten Gesetzmäßigkeiten an und benützen die dort gefundenen Formeln:

$$p_2 = \frac{M}{W} = \frac{6860}{3530} = 1{,}94 \text{ kgcm}^2.$$

$$\left(w = \frac{a^2 \cdot b}{6} = \frac{46^2 \cdot 10}{6} = 3530 \text{ cm}^3.\right)$$

Bezeichnet man die äußere Kante der Gleitfläche, die der Welle näher liegt mit α und die innere, die dem Zylinderdeckel zugekehrt ist, mit β, so folgt die Gesamtpressung

$$p_\alpha = p_1 + p_2 = 6 + 1{,}94 = 7{,}94 \text{ kgcm}^2.$$

$$p_\beta = p_1 - p_2 = 6 - 1{,}94 = 4{,}06 \text{ kgcm}^2.$$

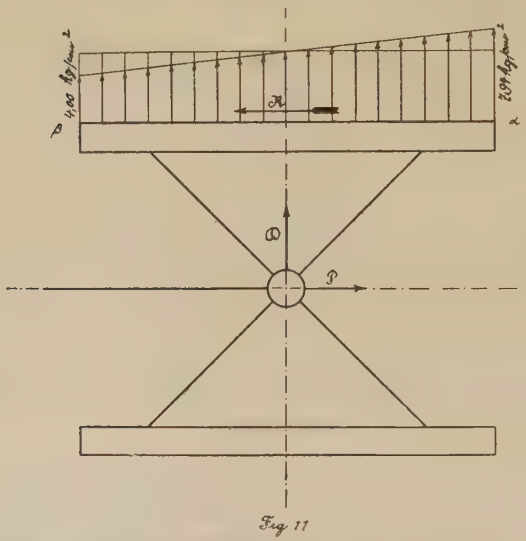


Fig. 11

Fig. 11 veranschaulicht den Druckverlauf.

c) Druckverteilung bei eingespannter Stange.

In der Kreuzkopfmitte angreifende Kräfte:

$$D = T - (G_{Kr} + G_T + B) = 3050 - (225{,}75 + 98{,}57) = 2725{,}6 \text{ kg}.$$

Gleichmäßig verteilter Druck:

$$p_1 = \frac{2725{,}6}{460} = 5{,}92 \text{ kgcm}^2.$$

Am Kreuzkopf wirkende Momente:

1. Einspannmoment $M_B = -9120$ cmkg.

Das Vorzeichen hat sich gegen früher geändert, da jetzt die Wirkungen auf den Kreuzkopf und nicht auf die Stange zu betrachten sind.

2. Reibungsmoment $M_R = D \cdot \mu \cdot h = -2725{,}6 \cdot 0{,}15 \cdot 16{,}5 = -6740$ cmkg.

Aus 1 und 2 folgt das Gesamtmoment:

$$M = M_B + M_R = -15860 \text{ cmkg.}$$

$$p_2 = \frac{M}{W} = \frac{15860}{3530} = 4{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dies ist eine Druckspannung an der äußeren Kante. Gesamtpressungen:

$$p_\alpha = p_1 + p_2 = 10{,}42 \text{ kg/cm}^2.$$
$$p_\beta = p_1 - p_2 = 1{,}42 \text{ kg/cm}^2.$$

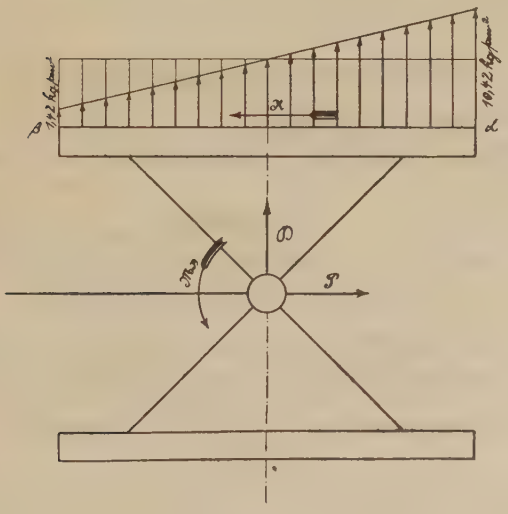


Fig. 12.

B. Rückgang.

a) Gleichmäßig verteilter Druck bei gelenkartiger Lagerung.

Flächendruck:

$$p_1 = \frac{2734{,}6}{460} = 5{,}95 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung unter Berücksichtigung des Einflusses der Reibung.

$$p_\alpha = 4{,}03 \text{ kg/cm}^2$$
$$p_\beta = 7{,}87 \text{ kg/cm}^2$$

c) Druckverteilung bei eingespannter Stange.

Hier wirkt das Reibungsmoment dem Einspannmoment entgegen.

$$p_\alpha = 6{,}53 \text{ kg/cm}^2$$
$$p_\beta = 5{,}31 \text{ kg/cm}^2.$$

Der maximale Flächendruck dürfte von den Grenzwerten 6 und 10,42 kgcm² eingeschlossen werden. Auf jeden Fall ist er höher als 6 kg/cm² wie er gewöhnlich vorausgesetzt wird.

2. Flächenpressung im Gleitlager.

Abmessung des Lagers:
Länge $l = 145$ mm, Durchmesser $d = 60$ mm.

A. Hingang.

a) Gleichmäßige Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung.

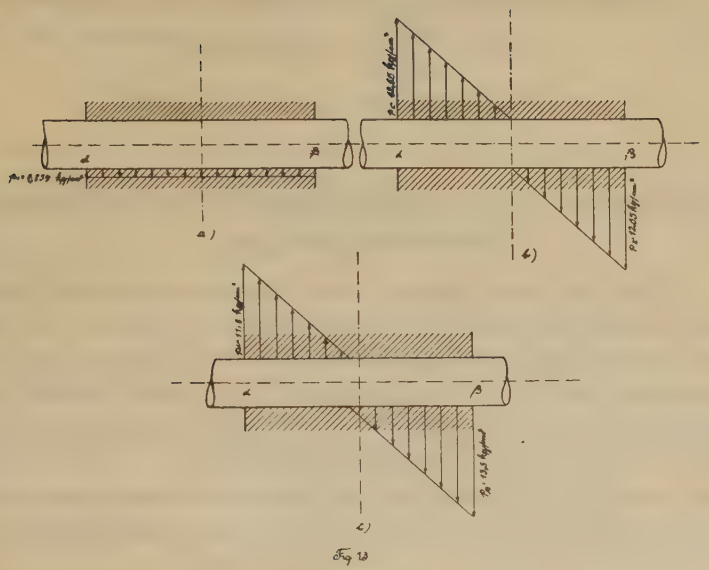
Auflagerkraft $A = 120{,}8$ kg,
Auflagerfläche $F_L = d \cdot l = 87$ cm².

Flächenpressung: $p = \frac{120{,}8}{87} = 1{,}39$ kg/cm².

b) Druckverteilung beim Fall der vollkommenen Einspannung.

Hier ist vorausgesetzt, daß die Lagerschalen die Stange fest umschließen. Eine Neigung der Endtangente der elastischen Linie sei unmöglich. Auch soll eine geradlinige Druckverteilung vorausgesetzt und die Biegungsgleichung $p = \frac{M}{W}$ gebraucht werden.

Auflagerkraft $A = 74{,}23$ kg.



$$p_1 = \frac{74{,}23}{87} = 0{,}854 \text{ kg/cm}^2. \quad \text{Fig. 13a.}$$

Einspannmoment $M_A = 2658$ cmkg.

Widerstandsmoment $W = \frac{l^2 \cdot d}{6} = 210{,}25 \text{ cm}^3$.

$$p_2 = \frac{2658}{210{,}25} = 12{,}65 \text{ kg/cm}^2. \quad \text{Fig. 13b.}$$

Beide Druckanteile zusammen liefern das Bild Fig. 13c $p_\alpha = p_2 - p_1 = 11{,}8$ kg/cm² und $p_\beta = p_2 + p_1 = 13{,}5$ kg/cm².

B. Rückgang.

a) Gleichmäßige Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung.

Auflagerkraft $A = 83{,}15$ kg, damit erhalten wir

$$p = \frac{83{,}15}{87} = 0{,}953 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Druckverteilung beim Fall der Einspannung.

Auflagerkraft $A = 68{,}8$ kg, damit erhalten wir

$$p_1 = \frac{68{,}8}{87} = 0{,}79 \text{ kg/cm}^2.$$

Einspannmoment $M_A = 2415$ cmkg, damit erhalten wir

$$p_2 = \frac{4215}{210{,}25} = 11{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

$p_\alpha = 10{,}7$ kg/cm² und $p_\beta = 12{,}3$ kg/cm².

Ergebnisse der Untersuchung für verschiedene Kolbenstellungen.

Eine einzige Stellung des Kolbens reicht zur Beurteilung der gesamten Verhältnisse nicht aus. Daher wurden für verschiedene Stellungen des Hin- und Rückganges Momentenfläche, elastische Linie und Flächendruckverteilung ermittelt und die Ergebnisse in Tabellen zusammengestellt. Tab. I gibt die Stellungen des Kolbens in % des Hubes an, sowie die notwendigen Stangendimensionen und wirksamen Kräfte Die Bezeichnungen entsprechen denjenigen in Fig. 7.

Tab. I.

Kolbenstellung		0 %	25 %	50 %	70 %	85 %	100 %
l_1	mm	1210	1210	1210	1210	1210	1210
l_2	mm	1490	1490	1490	1490	1490	1490
l_x	mm	500,5	665,5	830,5	962,5	1061,5	1160,5
l_y	mm	709,5	544,5	379,5	247,5	148,5	49,5
Kolbendruck P.	Hingang kg	30000	30000	30000	30000	24500	– 30000
	Rückgang kg	30000	– 30000	– 30000	– 30000	– 30000	– 30000
Komponente des Triebstangendruckes	kg	0	2700	3200	3050	1900	0
	kg	0	2700	3200	3050	2400	0

Mit diesen Daten haben sich für gelenkartige Auflagerung folgende Ergebnisse herausgestellt:

Tab. II.

Kolbenstellung		0 %	25 %	50 %	70 %	85 %	100 %
Knicksicherheit		10,75	7,66	5,74	4,54	4,66	—
Zuwachskoeff	H	1,1	1,15	1,21	1,28	1,275	0,76
	n						
	R		0,885	0,852	0,82	0,8	
Flächenpresung in A kg/cm²	H	1,45	1,4	1,37	1,39	1,33	0,82
	R		1,19	1,05	0,95	0,89	
Flächenpressung in B kg/cm²	H	− 0,59	5,27	6,35	6	3,52	− 0,65
	R		5,23	6,3	5,94	4,52	
Durchbiegung mm		0,5	0,75	1,265	1,86	2,28	1,66

Die Tab. II ist unter der Annahme einer gleichmäßigen Druckverteilung, wie sie bei der allgemein gebräuchlichen Rechnung vorausgesetzt wird, zusammengestellt. Die negativen Drücke sind solche Kräfte, welche die untere Gleitbahn belasten. In den Totlagen tritt der Fall ein, da hier der Triebstangendruck wegfällt und nur Kreuzkopf, Stangengewicht und der Auflagerdruck B wirken.

Die größte Knickgefahr liegt bei 80 % des Hubes, die Sicherheit beträgt dort 4,5. Aus den gefundenen Momentenflächen läßt sich das Maximalmoment ermitteln zu: M max. = 11000 cmkg. Damit wird die Materialbeanspruchung: $\sigma = 470 + 151 = 621$ kg/cm² bei dem Stangenteil mit dem größeren Durchmesser und

$$\sigma = 510 \text{ kg/cm}^2$$

in dem anderen Teil.

Die Betrachtung der Biegungspfeile lehrt, daß von 75 % bis 97 % des Hubes der Kolben an der Zylinderwand anschleift, da nur ein Spiel von 2 mm angegeben ist. Auch in den Stopfbüchsen tritt ein Anlegen der Kolbenstange ein, da hier nur 1 mm Spielraum vorgesehen ist. In Wirklichkeit dürfte diese Möglichkeit des nachteiligen Anschleifens nicht vorhanden sein, nachdem die gelenkartige Lagerung ziemlich unvollkommen sein wird. Immerhin sollte auch hier wie in anderen Fällen die ungünstigste Annahme zugrundegelegt werden. Eine Vergrößerung des Spielraums zwischen Kolben- und Zylinderwand wäre nicht ratsam, es bliebe nur eine Verstärkung der Stange übrig. In Wirklichkeit begegnete man dem Uebelstande dadurch, daß man nachträglich zwischen Kolbenring und Kolbenkörper kleine Beilagen anbrachte, sodaß bei geringen Durchsenkungen die Stange vom Kolben gestützt wird.

Tab. III enthält die Werte der Flächenpressungen am Kreuzkopf für gelenkartige Lagerung aber mit Berücksichtigung der Reibungsmomente.

Tab. III.

Kolbenstellung		0 %	25 %	50 %	70 %	85 %	100 %
Flächendruck in α kg/cm²	H	– 0,78	6,97	8,58	7,94	4,65	– 0,94
	R	– 0,4	3,55	4,03	4,03	3,06	– 0,48
Flächendruck in β kg/cm²		– 0,4	3,57	4,38	4,06	2,39	– 0,48
		– 0,78	6,91	8,3	7,87	5.98	– 0,94

Endlich sind in Tab. IV die Werte für den Grenzfall einer vollkommenen Einspannung zusammengestellt:

Tab. IV.

Kolbenstellung	0 %	25 %	50 %	70 %	85 %	100 %
Zuwachskoeff. n. H	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	0,94
Zuwachskoeff. n. R		0,975	0,963	0,956	0,942	
Flächenpr. in A an kante α kg/cm² H	7,0	9	10,91	11,8	12,2	12,6
Flächenpr. in A an kante α kg/cm² R		8,44	9,83	10,71	10,64	
Flächenpr. in A an kante β kg/cm² H	9,5	11,1	12,89	13,5	13,66	14
Flächenpr. in A an kante β kg/cm² R		10,5	11,66	12,29	12,2	
Flächenpr. in B an kante α kg/cm² H	0	8,73	10,37	10,42	6,86	—
Flächenpr. in B an kante α kg/cm² R		5,4	6,26	6,53	5,95	
Flächenpr. in B an kante β kg/cm² H	− 2,0	1,67	2,23	1,42	0	—
Flächenpr. in B an kante β kg/cm² R	− 4,0	5,0	6,34	5,31	3,05	

In der Nähe der Totlagen sind die Werte unzuverlässig, da der Druckwechsel zwischen oberer und unterer Gleitbahn vor sich geht. Von einer Einspannung kann in diesen Lagen kaum eine Rede sein. Der Kreuzkopf stellt sich in die Richtung der Endtangenten der elastischen Linie ein, denn bedeutende Kräfte, die das verhindern, sind nicht vorhanden. Ja in dem Falle, wo der nach oben wirkende Triebstangendruck und die Kräfte nach abwärts sich das Gleichgewicht halten, haben wir vollkommen gelenkige Lagerung, vorausgesetzt, daß ein kleiner Spielraum zwischen Gleitschuhen und Gleitbahn vorhanden

ist. In den Totlagen kommt es auch nicht so sehr darauf an, genaue Werte über die Flächendrücke zu besitzen, da hier die Gefahren am geringsten sind.

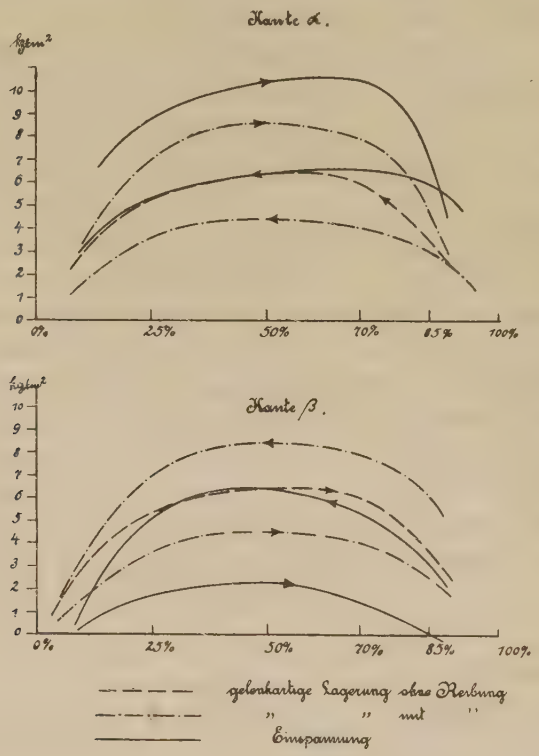


Fig. 14.

In Figur 14 sind die Flächendrücke zu den Kolbenwegen für Kante α und β graphisch aufgetragen, sowohl für gelenkartige Lagerung, als wie auch für Momentenbelastungen. Die Kurven lassen deutlich die starken Druckschwankungen während eines Hin- und Rückganges erkennen. Fernerhin fällt der Unterschied in der Größe der Flächenpressungen unter verschiedenen Voraussetzungen ins Auge und es zeigt sich die zu niedrige Einschätzung des Flächendruckes unter der gewöhnlichen Voraussetzung einer gleichmäßigen Verteilung.

Die Unbestimmtheit in der Kräftewirkung sollte womöglich vermieden werden und die Konstruktion dahin gehen eine Voraussetzung, die der Berechnung zugrunde gelegt wurde, zu erfüllen. Im vorliegenden Falle wäre durch geeignete Ausbildung des Kreuzkopfes eine gelenkartige Abstützung ohne allzu große Schwierigkeiten zu erreichen, wodurch der Konstrukteur in die Lage versetzt wäre, genaue, mit der Wirklichkeit übereinstimmende Berechnungen der Materialbeanspruchungen, der Durchbiegungen usw. anzustellen. Bei der Bestimmung der Flächenpressungen käme dann der Fall b in Frage „gelenkartige Lagerung mit Berücksichtigung der Reibungsmomente".

Beim Gleitlager, wo die Unbestimmtheiten in der Druckverteilung noch größer sind als wie beim Kreuzkopf ist man ihnen schon begegnet, indem man die Schalen bei rasch laufenden Maschinen in Kugelgelenken lagerte.

1. Tandemmaschine mit aufsitzendem Kolben.

Bei Stangen, deren Abstützung durch den Kolben selbst erfolgt, kommt die Inanspruchnahme durch die oft bedeutende Kolbenlast in Wegfall. Dafür tritt eine neue Beanspruchung infolge der Kolbenreibung an der Zylinderwand auf, die stets der Bewegung der hin- und hergehenden Teile entgegenwirkt und bei großen Maschinen einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß gewinnen kann. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie die Untersuchung einer dreifach gelagerten Kolbenstange durchzuführen ist, wobei alle wirksamen Momente und Kräfte Berücksichtigung finden.

Die betrachtete Stange gehört einer 6000 PS Walzenzugmaschine an mit den Zylinderabmessungen:

Hub $s = 1300$ mm
Durchmesser des HDZ $= 950$ mm
„ „ NDZ $= 1400$ mm

Die Dampfspannung beträgt 9—10 atm.

Die Tourenzahl schwankt zwischen 120 und 160 pro min.

Stangendimensionen mit den in Fig. 15 eingeschriebenen Bezeichnungen:

Länge AB $= l_1 = 3475$ mm
„ BC $= l_2 = 2800$ mm

Unverbiegbares Stangenende am Kreuzkopf $l_K = 600$ mm
„ „ „ NDK $l_N = 90$ mm

Durchmesser $d_1 = 155$ mm Trägheitsmoment $\Theta_1 = 2830$ cm^4
„ $d_2 = 170$ mm „ $\Theta_2 = 4100$ cm^4

Stangengewicht pro 1 cm Länge des Teiles AB: $\gamma_1 = 1{,}5$ kg
„ „ 1 cm „ „ „ BC: $\gamma_2 = 1{,}8$ kg

Gewicht des Niederdruckkolbens $G_N = 680$ kg
„ „ Hochdruckkolbens $G_H = 450$ kg

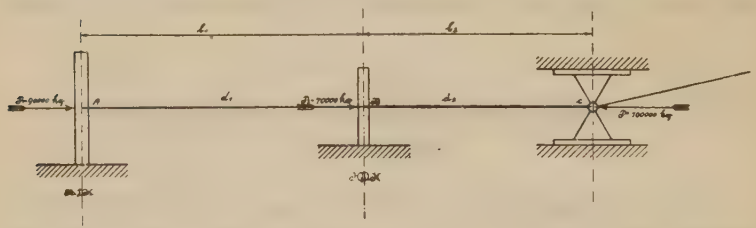


Fig. 15

Die Lagerung der Stange erfolgt am Kreuzkopf am Hoch- und Niederdruckkolben. Für den 1. Grenzfall werden an den drei Stützstellen Gelenke angenommen, während beim 2. das Auftreten von Einspannmomenten am Kreuzkopf und Niederdruckkolben, der mit Gleitschuhen versehen ist, vorausgesetzt wird. Der Hochdruckkolben weist nur eine geringe Sitzfläche auf und kann sich leicht in die Neigung der Tangente an die elastische Linie einstellen, besonders wenn er nur auf den unterlegten Kolbenringen aufruht.

Bei vorliegender Stange genügt es, die Untersuchung für eine Stellung durchzuführen, da die einzelnen Abstände unveränderlich sind.

a) Gelenkartige Auflagerung.

1. Einfluß des Eigengewichtes.

In Fig. 16 sind Momentenfläche und elastische Linie in bekannter Weise aufgesucht. Zuerst wird der Fall einer Auflagerung auf 2 Stützen A und C behandelt und dann bei B eine bekannte Kraft, hier 400 kg, angebracht. Sie

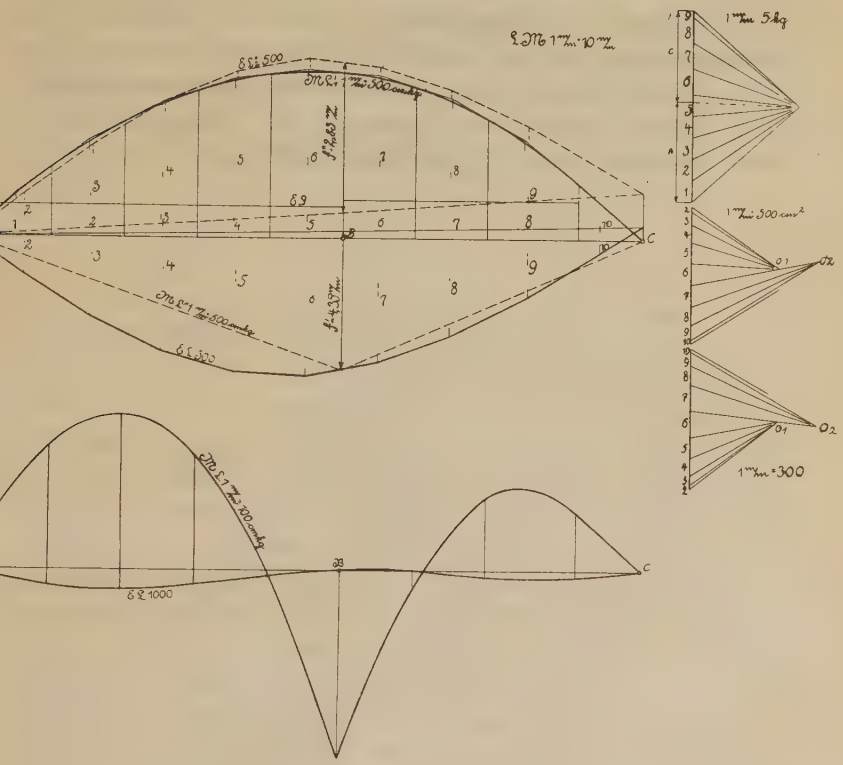


Fig. 16

verschiebt den Angriffspunkt um 2,83 mm. Nachdem die anfängliche Durchsenkung von B 4,35 mm betrug, ergibt sich das Verhältnis mit dem die Kräfte, Momente und Ordinaten der elastischen Linie für den Fall der Einheitskraft in B zu multiplizieren sind zu $\frac{4,35}{2,83} = 1,536$.

Beide Belastungsfälle vereinigt gibt das Endresultat Fig. 16 b. Die Auflagerkräfte, die nach den Lehren vom Seileck gefunden werden, haben folgende Größen:

$$A_E = 470 - 178{,}5 \cdot 1{,}536 = 195 \text{ kg}$$
$$B_E = 400 \cdot 1{,}536 = 615 \text{ kg}$$
$$C_E = 434 - 221{,}5 \cdot 1.536 = 94 \text{ kg}.$$

2. Einfluß der Kolbenreibung.

Neben dem Eigengewicht sind es weiterhin die Reibungskräfte an den auf der Zylinderwand aufsitzenden Kolben, die Beanspruchung und Durchbiegung beeinflussen. Die Kräfte greifen am Umfange des Kolbenkörpers an und erzeugen daher ein verbiegendes Moment. Als Hebel-

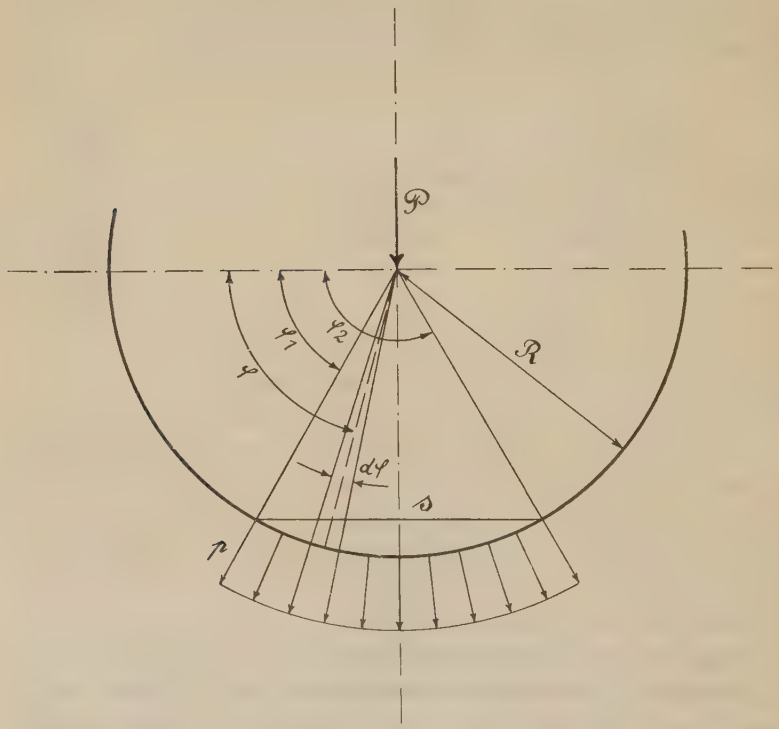


Fig. 17.

arme kommt der Radius R und r der Umfangskreise inbetracht, wie folgende Rechnung beweist. Die Verteilung der Flächenpressungen sei als eine gleichmäßige über die ganze Sitzfläche vorausgesetzt. Pro Flächeneinheit haben wir dann den Druck $p = \frac{P}{s \cdot b}$ wobei P den Gesamtdruck, s die Sehne über dem Berührungsbogen und b die Breite der Sitzfläche darstellt. Die Kraft dP für das Bogenstück $R \cdot d\varphi$ (Fig. 17) läßt sich ausdrücken durch $dP = p \cdot R \cdot d\varphi \cdot b$ und das Moment inbezug auf die wagrechte Drehachse wird.

$$M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dP \cdot \mu \cdot R \cdot \sin\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p \cdot R \cdot d\varphi \cdot b \cdot \mu \cdot R \cdot \sin\varphi$$

$$= p \cdot b \cdot \mu \cdot R^2 \, (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

$$= p \cdot b \cdot \mu \cdot R \cdot s = P \cdot \mu \cdot R.$$

Wir nehmen jetzt an, die Stange stehe unter dem alleinigen Einfluß der Reibungskräfte, dann erhalten wir das Bild Fig. 18. Am Niederdruckkolben im Abstande R greift die Reibungskraft $G \cdot \mu$ an, wobei G das Kolbengewicht + dem hinzukommenden Stangengewichtsanteil darstellt. Am Hochdruckkolben greift $P \cdot \mu$ an, wobei P dieselbe Bedeutung hat wie G. Den beiden Momenten wird das Gleichgewicht gehalten durch ein entgegengesetzt drehendes Moment, das die Auflagerkräfte A, B und C erzeugen. Die Reaktionen A und B erzeugen wieder Reibungen $A \cdot \mu$ und $B \cdot \mu$, die den anfänglichen Kräften entgegenwirken. So entsteht das Kräftebild wie es Fig. 18 angibt und zwar haben wir ein einfach statisch unbestimmtes System vor uns. Falls wir von den Kräften A, B und C eine ermittelt haben, finden sich die andern nach den einfachen Regeln der Statik. Zur Feststellung der Auflagerkraft B soll hier das von Castigliano angegebene Verfahren Anwendung finden. Es beruht darauf, daß für den Stützpunkt B die Formänderungsarbeit 0 wird, nachdem er keine Verschiebung erfahren kann. Differenziert man daher den Ausdruck der Formänderungsarbeit für die ganze Stangenlänge nach der Unbekannten B, so muß der

Differentialquotient = 0 werden, da wir für diese Stelle ein Minimum erhalten müssen. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit lautet für die Oeffnung A—B wenn der Einfluß der Schubspannung vernachlässigt wird:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_1^2 \, dx_1}{E \, \Theta_1}$$

M_1 bedeutet das Biegungsmoment in der 1. Oeffnung, E den Elastizitätsmodul und Θ_1 das Trägheitsmoment des Teiles A B der Stange. Die Bedeutung von a und x ist aus Fig. 18 zu entnehmen

$$M_1 = (G—A) \cdot m — A \cdot x$$

wobei $R \cdot \mu = m$ und $r \cdot \mu = n$ gesetzt wird.

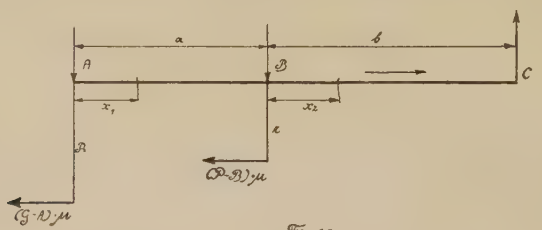


Fig 18

Die Formänderungsarbeit von o—a wird damit:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{2 E \Theta} (G^2 \cdot a \cdot m^2 + A^2 \cdot a \cdot (\frac{a^2}{3} + m\,a + m^2)$$
$$— A\,G \cdot a \cdot m \cdot (2\,m + a)$$

Für die 2. Oeffnung haben wir für die Formänderungsarbeit den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2} \int_0^b \frac{M_2^2 \, dx_2}{E \, \Theta_2}$$

Nach Fig. 18 ist

$$M_2 = (G—A) \cdot m + (P—B) \cdot n — x_2 (A + B) — A \cdot a$$

damit erhalten wir für $\mathfrak{A}_2$

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{2\,E\,\Theta_2} \left(A^2 \left((m + a)^2 + b \left(\frac{b}{3} + m + a \right) \right) \right.$$
$$— A\,(G \cdot m \cdot b + P \cdot n \cdot b)\,(2\,m + b + 2a)$$
$$\left. + B^2\,b\,(n^2 + n\,b + \frac{b^2}{3}) \right)$$

$$- B\,(G \cdot m + P \cdot n)\, b\,(2\,n + b)$$

$$+ A\,B\,(b\,m\,(2\,n + b) + n\,(2a + b) + b\,(\frac{2}{3}\,b + a)$$

$$+ G^2\,m^2\,b + P^2\,n^2\,b + 2\,m \cdot n \cdot b \cdot G \cdot P.)$$

Die gesamte Formänderungsarbeit $= \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$

Die Unbekannte A kann noch durch B ausgedrückt werden:

$$A = \frac{G \cdot m + P \cdot n}{l + m} - B\,\frac{b + n}{l + m}$$

Differenziert man noch B so bekommt man:

$$\frac{d\,A}{d\,B} = - \frac{b + n}{l + m}$$

Nachdem der Ausdruck für die Formänderungsarbeit $\mathfrak{A}$ gefunden ist wird $\frac{d\,\mathfrak{A}}{d\,B}$ gebildet, der Wert $= 0$ gesetzt und daraus B gefunden.

Am besten führt man nach der Feststellung von A Zahlenwerte ein um die Rechnung abzukürzen. Es ist nach früherem:

$$G = 875 \text{ kg} \quad P = 1065 \text{ kg}.$$

$a = l_1 = 3475$ mm; $b = l_2 = 2800$ mm: $\Theta_1 = 2830$ cm^4; $\Theta_2 = 4100$ cm^4; $R = 700$ mm; $\mu = 0{,}15$ mm; $r = 475$ mm und damit

$m = 700 \cdot 0{,}15 = 105$ mm und $n = 475 \cdot 0{,}15 = 71{,}2$ mm.

Nach Auswertung der Rechnung ergibt sich:

$$B = - 34{,}3 \text{ kg}, \quad A = 41{,}75 \text{ kg} \quad \text{und} \quad C = 9 \text{ kg}.$$

Die Gesamtreibungsgewichte und Momente werden mit diesen Zahlen:

$R_1 = 875 - 42 = 833$ kg; $M_1 = 833 \cdot 70 \cdot 0{,}15 = 8750$ cmkg

$R_2 = 1065 + 34 = 1099$ kg: $M_2 = 1099 \cdot 47{,}5 \cdot 0{,}15 = 7820$ „

Aehnlich wie der Einfluß des Eigengewichtes kann auch derjenige dieser Momente M_1 und M_2 auf zeichnerischem Wege festgestellt werden. Als Summe der Belastungsfälle wurde Fig. 19 erhalten.

Auflagerkräfte:

$$A = 153 \text{ kg}; \quad B = 649 \text{ kg}; \quad C = 103 \text{ kg}.$$

Die Krümmung der elastischen Linie ELu (Fig. 19) erfährt durch die Druckkräfte eine Vergrößerung.

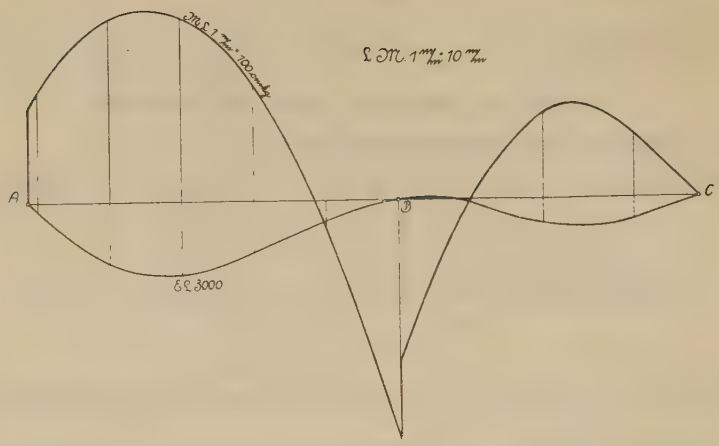


Fig 19

3. Einfluß der Achsialkräfte.

Die weitere Behandlung der verbogenen Stange geschieht in der gleichen Weise, wie bei dem früher besprochenen allgemeinen Fall eines Trägers auf 3 Stützen.

Die maximale Dampfspannung beträgt 10 atm. Es sei der ungünstigste Fall vorausgesetzt, daß auf den NDK Dampf von 6 atm. Spannung einwirke, während der Hochdruckkolben unter dem vollen Kesseldrucke steht, eine Möglichkeit, die beim Steckenbleiben eines Blockes in der Walze eintreten kann. Bei dieser Annahme erhalten wir: $P_1 = 90000$ kg, $P_2 = 70000$ kg und den am Kreuzkopf wirkenden Gegendruck $P = 160000$ kg.

Die graphische Ermittelung der Momentenfläche und der elastischen Linie erfolgte in Fig. 20 in bekannter Weise. Nur liegt hier ein etwas verwickelterer Fall vor, da in der Krümmung des Astes zwischen B und C ein Wechsel eintritt. Um die Form der elastischen Linie, die den Druckkräften allein entspricht, zu finden, müssen wenigstens 3 Linien gezeichnet werden. In Fig. 20 wurde noch eine 4. hinzugefügt, um möglichst genaue Werte zu erhalten. (Das Beispiel lehrt, wie weit die Genauigkeit mti dem anfangs entwickelten Verfahren getrieben werden

kann.) Als Flächeninhalte der Verbiegungslinien stellen sich heraus:

$L_2 = 654$ cm^2, $L_3 = 90{,}3$ cm^2 und $L_4 = 12{,}95$ cm^2

Die Knicksicherheit beträgt demnach:

$$k = \frac{90{,}3}{12{,}95} = 6{,}97$$

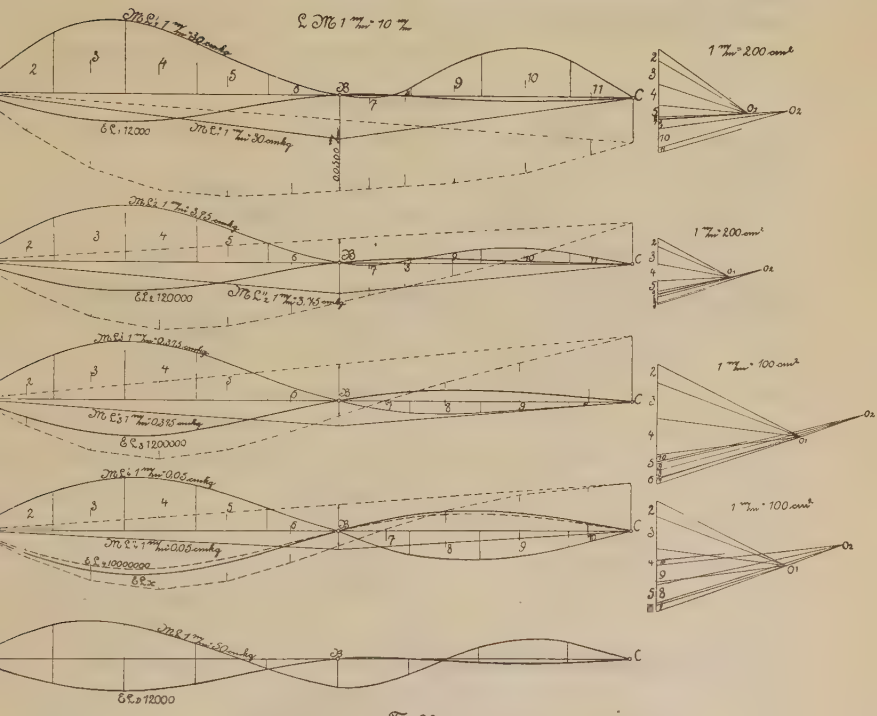


Fig. 20

oder mit den Werten von L_2 und L_3: $k = \frac{654}{90{,}3} = 7{,}24$

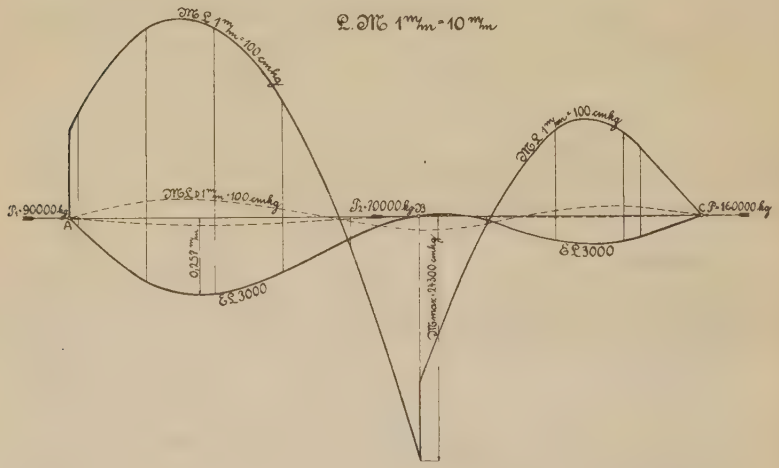
Der Zuwachskoeffizient $n = 1{,}165$; mit den ungenaueren Werten $n = 1{,}16$.

Fig. 20 e gibt das Endresultat für die Druckkräfte allein wieder. Die achsialen Kräfte bringen bei einem auf 3 Stützen gelagerten Stabe Auflagerdrücke hervor, die wieder die Reibungsgewichte beeinflussen, jedoch ist

ihre Größe unbedeutend und es wäre zwecklos, sie von vornherein zu berücksichtigen. Es ist:

$$A_a = -3{,}9 \text{ kg}, \quad B_a = 8{,}8 \text{ kg}, \quad C_a = -4{,}9 \text{ kg}$$

Durch Superposition von Fig. 19 und Fig. 20e entsteht Fig. 21, die den Verlauf der Momente und der elastischen Linie bei gelenkartiger Auflagerung der Kolbenstange darstellt. Durch gestrichelte Linien ist der Einfluß der Druckkräfte angegeben.



Endgültige Auflagerdrücke:

$$A = 153 - 4 = 149 \text{ kg}$$
$$B = 649 + 8 = 657 \text{ kg}$$
$$C = 103 - 5 = 98 \text{ kg}$$

Beanspruchung der Stange.

Sie setzt sich zusammen aus Druck- und Biegungsbeanspruchung. $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$ wobei M das größte aus der Figur zu entnehmende Moment bedeutet. Es tritt an der Uebergangsstelle von d_1 zu d_2 in der Größe von M max. = 24 300 cmkg auf.

Für den Durchmesser $d_1 = 155$ mm wird:

$$\sigma_1 = \frac{90\,000}{188{,}7} + \frac{24\,300}{365} = 477 + 66{,}6 = 543{,}6 \text{ kg/cm}^2$$

Für den Durchmesser $d_2 = 170$ mm wird:

$$\sigma_2 = \frac{160\,000}{227} + \frac{24\,300}{482{,}3} = 705 + 50{,}4 = 755 \text{ kg/cm}^2$$

Als sehr wichtig erscheint eine gute Abrundung an der Uebergangsstelle von d_1 auf d_2, da hier das maximale Biegungsmoment zustande kommt.

b) Einspannung am Kreuzkopf und am Niederdruckkolben.

Zu Beginn des Beispiels wurde darauf hingewiesen, daß als 2. Grenzfall eine vollkommene Einspannung am Kreuzkopf und Niederdruckkolben vorausgesetzt werden soll. Der Einfluß der Reibung soll jetzt unberücksichtigt bleiben, nachdem er ziemlich unbedeutend ist und die weitere Behandlung nur unnötigerweise kompliziert. Will man die Reibungsmomente berücksichtigen, so kann man genau so verfahren wie bei a, nur haben wir jetzt in dem System eine 3fache statische Unbestimmtheit, was bei der Anwendung der Methode von Castigliano weiter keine Schwierigkeiten macht; es brauchen nur jeweils die partiellen Ableitungen nach den unbekannten Kräften und Momenten gebildet und dieselben = 0 gesetzt zu werden. Etwas Neues ergibt sich nicht.

Als ursprüngliche Belastung soll nur das Eigengewicht und natürlich die beiden Einspannmomente in Frage kommen. Für das Eigengewicht wurde die elastische Linie bereits früher Fig. 16 gefunden. Jetzt müssen die beiden Endtangenten bis zur Horizontalen zurückgebogen werden. Dabei verfahren wir ebenso, wie in dem Beispiele der Einzylindermaschine. Wir führen an den Endpunkten A und C bekannte Momente $M_A^0 = 10000$ cmkg und $M_C^0 = -10000$ cmkg ein Fig. 22. Aus den Winkeländerungen lassen sich dann die wirklichen Momente errechnen.

Auf Seite 29 wurde die Formel, die hier verwendet werden kann gefunden:

$$\beta_A = -\frac{\beta_A^0 \,(\delta_C^0 \cdot \alpha_A - \delta_A^0 \cdot \alpha_C)}{\beta_C^0 \cdot \delta_A^0 - \beta_A^0 \cdot \delta_C^0}$$

$$\delta_A = -\alpha_A - \beta_A$$

α_A und α_C Neigungswinkel infolge des Eigengewichtes in A und C.

β_A^0 und β_C^0 Neigungswinkel infolge des Einheitsmomentes M_A^0

δ_A^0 und δ_C^0 Neigungswinkel infolge des Einheitsmomentes M_C^0

β_A und δ_A sind die Winkel infolge der unbekannten Momente.

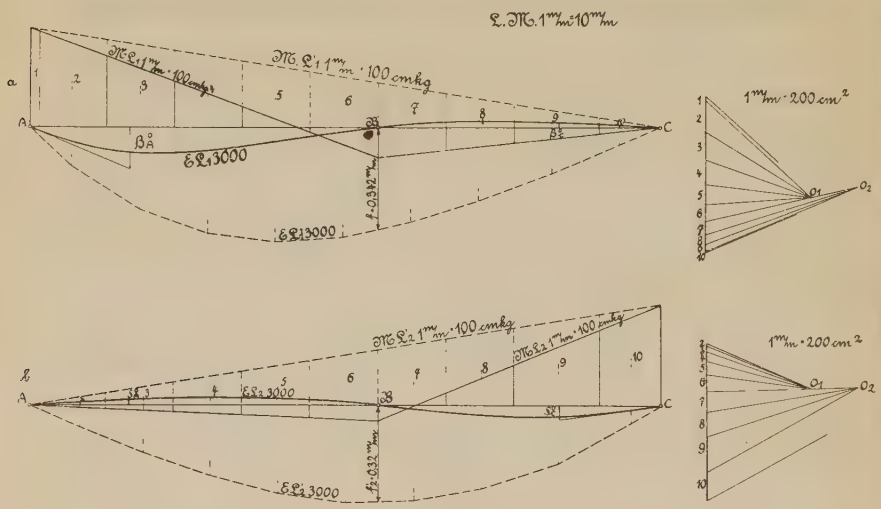


Fig. 22.

$$M_A = M_A^0 \frac{\beta_A}{\beta_A^0} \; ; \; M_C = M_C^0 \frac{\delta_A}{\delta_A^0}$$

Aus Fig. 22 ergibt sich:

$\beta_A^0 = -41{,}5 \; ; \; \beta_C^0 = 5 \; ; \; \delta_A^0 = 6 \; ; \; \delta_C^0 = -13{,}5$

Aus Fig. 16

$$\alpha_A = 63 \; : \; \alpha_C = 30$$

Mit diesen Größen erhält man:

$\beta_A = -80{,}6$ und $M_A = -19400$ cmkg

$\delta_A = 20{,}6$ „ $M_C = 35200$ „

Multipliziert man die Ergebnisse der Einheitsmomente mit

den Verhältniszahlen: $m_A = \frac{M_A}{M_{A^0}} = \frac{-\ 19400}{10000} = -\ 1{,}94$

und $m_C = \frac{M_C}{M_{C^0}} = \frac{35200}{-\ 10000} = -\ 3{,}52$

und addiert sie zu den vom Eigengewicht herrührenden, so erhält man den Zustand der Stange, solange keine Druckkräfte wirken Fig. 23 a.

Die Auflagerkräfte betragen:

A = 195 + 88 = 283 kg
B = 615 — 252 = 363 „
C = 94 + 165 = 259 „

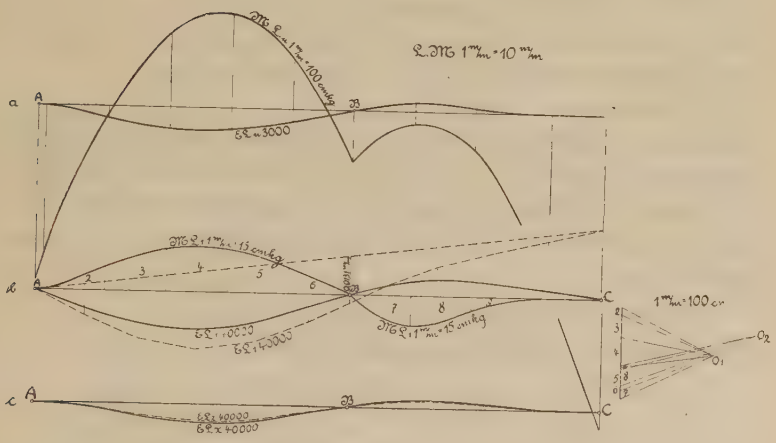


Fig. 23.

Wirkung der Achsialkräfte.

P_1 am N.D.K. = 90000 kg. P_2 am H.D.K = 70000 kg. Die Konstruktion der elastischen Linie zeigt Fig. 23 b. Zuerst wird angenommen, der Stab sei gelenkartig aufgelagert. Die Druckkräfte vergrößern die Krümmung. Die Neigung der Endtangenten stellt sich heraus zu $\alpha_A = -\ 2{,}74$ und $\alpha_C = 0{,}937$. Nach der Einführung von Einheitsmomenten bei A und C kann die früher Seite 29 abgeleitete Formel benützt werden:

$$\beta_A = \frac{\beta_A^0 \, (\delta_C^0 \, \alpha_A - \delta_A^0 \, \alpha_C)}{\beta_C^0 \, \delta_A^0 - \beta_A^0 \, \delta_C^0}$$

$$\delta_A = - \alpha_A - \beta_A$$

$$M_A = M_A^0 \, \frac{\beta_A}{\beta_A^0} \; ; \qquad M_C = \frac{M_C \, \delta_A}{\delta_A^0}$$

Die Größen der Neigungswinkel der Endtangenten infolge der Einheitsmomente sind weiter oben angegeben. Dann wird:

$$\beta_A = \frac{-41{,}5 \; (13{,}5 \cdot 2{,}74 - 6 \cdot 0{,}937)}{5 \cdot 6 - 41{,}5 \cdot 13{,}5} = 2{,}455$$

$$\delta_A = + 2{,}74 - 2{,}455 = 0{,}285$$

$$M_A = 10000 \cdot \frac{2{,}455}{-41{,}5} = - 592 \text{ cmkg}$$

$$M_C = - 10000 \, \frac{0{,}285}{6} = - 475 \text{ cmkg}$$

Nachdem die Momente bekannt sind, findet man die richtige elastische Linie mit Hilfe der Ergebnisse der Einheitsmomente Fig. 22 b. Die Konstruktion einer einzigen Linie reicht hier aus, da ELu und EL_1 der Form nach ziemlich ähnlich sind.

Durch Planimetrieren wird gefunden:

$EL\mu = 620 \text{ cm}^2$ und $EL_1 = 59{,}3 \text{ cm}^2$ daraus

$$k = \frac{620}{59{,}3} = 10{,}65 \text{ und } n = \frac{620}{560{,}7} = 1{,}106$$

Aus EL_1 und dem Zuwachskoeffizient n bestimmt sich EL x das zu $EL\mu$ zu addieren ist.

Die Momentenfläche setzt sich zusammen aus der Fläche, die aus der elastischen Linie hervorgeht und den Dreiecksflächen infolge der Stützenreaktionen bei B und der beiden Einspannmomente.

$M_A = - 592. \; 1{,}106 = - 655$ cmkg und $M_C = - 475. \; 1{,}106 = - 526$ cmkg.

Die Auflagerkräfte setzen sich zusammen aus: dem Anteil, der durch den Stützdruck bei B und aus dem, der durch die Einspannung bewirkt wird. Ihre Größen sind ziemlich unbedeutend. $A_2 = 1{,}32$ kg $B_2 = 1{,}27$ kg $C_2 = - 2{,}59$ kg.

Endergebnis:

Auflagerkräfte:

$A = 284{,}3$ kg $B = 364{,}3$ kg $C = 256{,}4$ kg

Momente an den Stützpunkten:

$M_A = -20\,055$ cmkg $M_B = 5\,800$ cmkg $M_C = 34\,674$ cmkg

Flächenpressungen.

Die Drücke pro cm² zwischen Kolben und Zylinderwand und zwischen Kreuzkopf und Gleitfläche werden für die bis jetzt angenommenen 2 Grenzfälle ermittelt. Der erste Fall, gelenkartige Lagerung an allen Stellen und gleichmäßige Verteilung der Pressungen über die ganze Fläche entspricht der gebräuchlichen Annahme und ein Vergleich mit den Werten aus der Voraussetzung des zweiten Falles soll eine Beurteilung der Zulässigkeit jener Annahme liefern. Die Methode zur Bestimmung der Flächendrücke wurde bereits früher festgelegt.

I. Flächenpressung am Kreuzkopf.

An Konstruktionsdaten benötigen wir:

das Gewicht des Kreuzkopfes $G_{kr} = 1050$ kg

das halbe Gewicht der Triebstange $G_T = 1025$ kg

die nach abwärts wirkende Komponente des Triebstangendruckes $T = 32\,500$ kg

die Dimensionen der Gleitschuhe:

Länge $l = 950$ mm

Breite $b = 540$ mm

Abstand des Zapfenmittels von der Gleitfläche $h = 460$ mm.

a) Gleichmäßige Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung.

Gesamtdruck auf die Gleitbahn:

$$D = G_{kr} + G_T + T + \text{Auflagerdruck } C$$

$$= 1050 + 1025 + 32\,500 + 98 = 34\,673 \text{ kg}$$

Gleitfläche $F = b \cdot l = 95 \cdot 54 = 5\,130$ cm²

Flächendruck $p = \dfrac{34\,673}{5\,130} = 6{,}76$ kg/cm²

Diese Pressung überschreitet den gewöhnlich als höchst zulässig angegebenen Maximalwert um das Doppelte. Jedoch ist zu bedenken, daß die hier vorausgesetzten Kolbenbelastungen nur selten und dann nur kurze Zeit zur Wirkung kommen.

b) Druckverteilung bei eingespannter Stange.

Im Kreuzkopfmittel angreifende Kräfte:

$$D = G_{kr} + G_T + T + C = 34575 + 256 = 34831 \text{ kg}$$

daraus gleichmäßig verteilter Druck:

$$p_1 = \frac{34831}{5130} = 6{,}79 \text{ kg/cm}^2$$

Am Kreuzkopf wirkende Momente:

1. Einspannmoment: $M_3 = -34674$ cmkg
2. Reibungsmoment: $M_R = D \cdot \mu \, h = 34831 \cdot 0{,}15 \cdot 46 = 240500$ cmkg.

$$M = M_3 + M_R = 205826 \text{ cmkg.}$$

Widerstandsmoment der aufsitzenden Fläche: $W = 81200 \text{ cm}^3$

$$p_2 = \frac{M}{W} = \frac{205826}{81200} = 2{,}54 \text{ kg/cm}^2$$

dies ist eine Druckspannung an der äußeren Kante

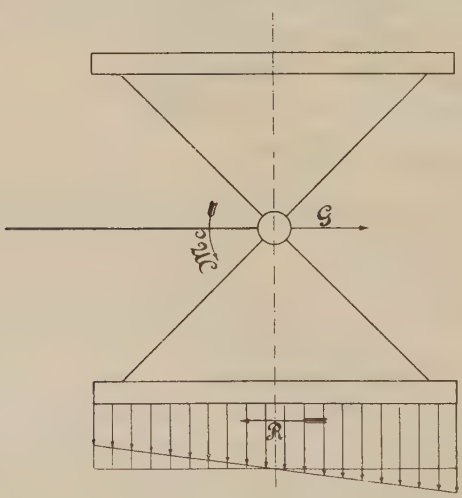


Fig. 24.

$$p\alpha = 9{,}33 \text{ kg/cm}^2$$
$$p\beta = 4{,}25 \quad \text{„}$$

Den Druckverlauf über die ganze Sitzfläche veranschaulicht Fig. 24.

In diesem Falle erweist sich eine gelenkartige Ausbildung des Kreuzkopfes nicht als besonders nötig, da das Einspannmoment nur ganz unbedeutenden Einfluß auf die Verteilung der Flächendrücke hat. Von dem Gesichtspunkte aus möglichste Bestimmtheit in dem Kräfteverlauf zu erhalten, wäre sie empfehlenswert.

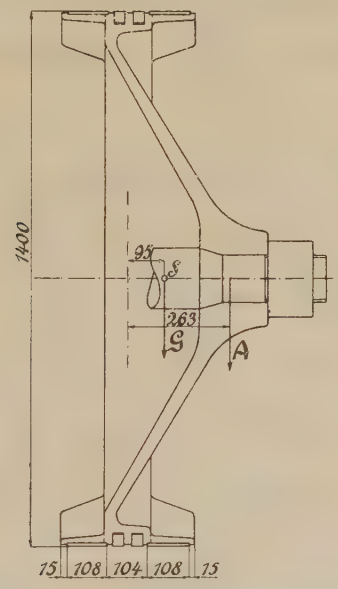


Fig. 25.

2. Flächenpressung am Niederdruckkolben.

Fig. 25 zeigt den Querschnitt des N.D.K. mit den in Betracht kommenden Hauptmaßen. Die Breite der aufsitzenden Fläche beträgt 70 cm. Die Richtung des Eigengewichtes und der Stangenauflagerkraft gehen hier nicht durch die Mitte der Sitzfläche. Infolgedessen kommen

zu den Reibungs- und Einspannmomenten noch solche hinzu, die durch die exzentrisch angreifenden Kräfte hervorgerufen werden.

a) Gleichmäßige Druckverteilung bei gelenkartiger Lagerung.

Gesamtdruck des Kolbens auf die Zylinderwand bestehend aus Kolbengewicht und Auflagerdruck A der Stange.

$$D = 680 + 149 = 829 \text{ kg.}$$

Sitzfläche des Kolbens $F = 1512 \text{ cm}^2$

Flächenpressung $p = \frac{829}{1512} = 0{,}549 \text{ kg/cm}^2$

b) Druckverteilung beim Vorhandensein von Momenten.

Gesamtdruck des Kolbens auf die Zylinderwand:

$$D = 680 + 284 = 964 \text{ kg}$$

daraus gleichmäßig verteilte Pressung:

$$p_1 = \frac{964}{1512} = 0{,}635 \text{ kg.}$$

Am Kolben wirkende Momente:

1. Einspann- und Reibungsmoment $M_1 = 20055$ cmkg
2. Moment des Eigengewichtes = Kolbengewicht mal Abstand des Schwerpunktes von der Mitte der Sitzfläche. $M_E = -680 \cdot 9{,}5 = -6460$ cmkg
3. Moment der Auflagerkräfte = Auflagerkraft A mal Abstand des Angriffspunktes von der Mitte der Sitzfläche. $M_R = -284 \cdot 26{,}3 = -7460$ cmkg.

   Resultierendes Moment $M = 6135$ cmkg.

   Widerstandsmoment der Sitzfläche: $W = 11540 \text{ cm}^3$

$$p_2 = \frac{M}{W} = \frac{6135}{11540} = 0{,}532 \text{ kg/cm}^2$$

p_2 ist eine Druckspannung an der Kante, die der Kurbelseite zugewandt ist.

p max. $= 1{,}17 \text{ kg/cm}^2$ p min. $= 0{,}103 \text{ kg/cm}^2$

Die Flächenpressungen stellen sich am N.D.K. als sehr günstig heraus und erfahren durch den exzentrischen Angriff des Eigengewichtes und der Auflagerkraft eine wesentliche Verbesserung.

3. Flächendruck am Hochdruckkolben.

Gemäß der gemachten Voraussetzung haben wir es hier nur mit dem Falle gelenkartiger Auflagerung zu tun.

Gesamtdruck des Kolbens auf die Zylinderwand

$$D = G_{H.D.K.} + B = 450 + 657 = 1107 \text{ kg.}$$

Sitzfläche bei unterlegten Kolbenringen: $F = 304 \text{ cm}^2$

daraus Flächenpressung $p = \frac{1107}{304} = 3{,}64 \text{ kg/cm}^2$

B. Triebstangen.

Die Triebstangen der Kolbenmaschinen sind in weit größerem Maße der Knickgefahr unterworfen, als die Kolbenstangen und ihre genaue Bestimmung ist daher unerläßlich. Eine vollkommene Beurteilung der Spannungsverteilung ermöglichen jedoch die Lehren von der Knickfestigkeit nicht und gar manche Stangenbrüche können durch sie keine Erklärung finden.

Mit der früher entwickelten Methode zur Berechnung von irgendwie beanspruchten Stangen soll nun gezeigt werden, wie man unter bestimmten Voraussetzungen sich über die Anstrengung des Materials in allen Querschnitten Klarheit verschaffen und den drohenden Gefahren nachspüren kann. Sowohl die Knicksicherheit wie auch der Verlauf der Spannungen über die ganze Stangenlänge und die elastische Linie lassen sich leicht auf graphischem Wege feststellen, wobei gleichzeitig die Unverläßlichkeit der Kenntnis der Knickgefahr allein ins Auge fällt.

Der Untersuchung wurde eine Lokomotivtriebstange zugrunde gelegt, bei der die Verhältnisse besonders ungünstig liegen. Sie gehört der Maschine an, deren Kolben-

stange früher schon behandelt wurde. Die Ausführung mit den Hauptdimensionen läßt Fig. 26 erkennen. Die Trägheitsmomente in den einzelnen Querschnitten stellen sich als sehr verschieden heraus und wir haben gleichzeitig ein gutes Beispiel um die Anwendung des anfangs entwickelten Verfahrens auf Stangen mit veränderlichen Trägheitsmomenten von Querschnitt zu Querschnitt zu zeigen.

Die Lokomotive soll sich gerade im Anfahrzustand befinden, da dann die Beanspruchung der Trieb- und Kuppelstangen am größten wird. Der Dampfdruck lastet während 78 % des Hubes auf dem Kolben, die Reibungen

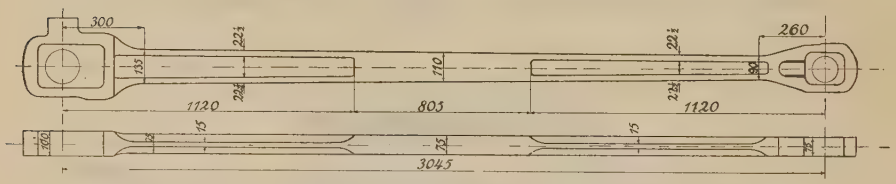


Fig. 26

erlangen ihren Höchstwert und die Zeit ist ziemlich reichlich bemessen, um die Formänderungen zur Ausbildung kommen zu lassen.

Die Betrachtung erfolgt sowohl für die vertikale als auch für die horizontale Ebene.

1. Belastungen in der vertikalen Ebene.

Zur Wirkung kommt 1. das Eigengewicht, 2. das Zapfenreibungsmoment und 3. die Achsialdrücke. Hier soll nun unter Zugrundlegung von verschiedenen Annahmen klargelegt werden, welche Bedeutung unter Umständen den Reibungsmomenten beizulegen ist und wie sie die Spannungsverteilung in der Stange beeinflussen können. Der Koeffizient der Knicksicherheit wird davon nicht berührt.

I. Einfluß des Eigengewichtes.

In Fig. 27 a wurde für den, durch den Linienzug EG angegebenen Verlauf der Eigengewichte die Momentenlinie ML_E gezeichnet. Die Maßstäbe sind der Figur zu entnehmen. Zur Konstruktion der elastischen Linie führen wir eine reduzierte Momentenfläche ein, indem wir ein konstantes Trägheitsmoment Θm festlegen und die Ordinaten

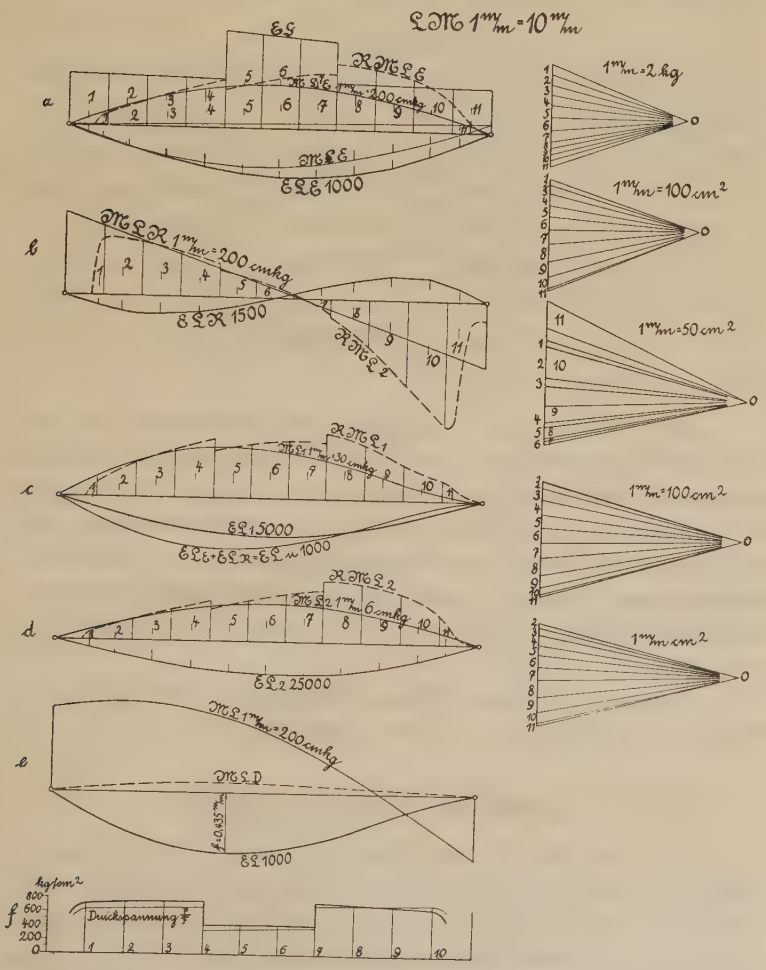


Fig. 27.

der Momentenlinie mit dem Verhältnis $\frac{\Theta m}{\Theta}$ multiplizieren wenn Θ das Trägheitsmoment des jeweiligen Querschnittes bedeutet.

Tabelle der Trägheitsmomente Θ in den in der Figur bezeichneten Querschnitten, der Verhältniszahlen $\frac{\Theta m}{\Theta}$ für $\Theta m = 1000$ cm^4 und den Widerstandsmomenten W.

Tabelle 5.

Querschnitt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Θ cm^4	1170	1031	958	864 1075	950	810	700 597	527,5	451	410
$\frac{\Theta m}{\Theta}$	0,855	0,966	1,044	1,156 0,93	1,054	1.24	1,43 1,68	1,90	2,22	2,44
W cm^3	174	159	153	141 179	165	148	135 115	106	95	91

Der Verlauf der reduzierten Momentenlinie ist gestrichelt eingezeichnet. An den Uebergangsstellen zu den Stangenköpfen kann die Linie nach Gutdünken eingetragen werden, da hier das Trägheitsmoment stark anwächst und die Abschnitte wenig zur Verbiegung beitragen. Eventuell können auch leicht Trägheitsmomente für ein paar Querschnitte ermittelt werden. Allzu große Genauigkeit ist zwecklos.

Aus der reduzierten Momentenfläche wird in bekannter Weise die elastische Linie EL_E gezeichnet.

2. Einfluß der Reibungsmomente.

Die Maschine soll eine Drehrichtung im Uhrzeigersinn aufweisen und in der Stellung Fig. 28 sich befinden. Die Kraftrichtung fällt bei dem Auftreten von Zapfenreibungen nicht mit der Stabachse zusammen, sondern sie bildet eine Tangente an die beiden Reibungskreise. Die Berührungsseite ist nun festzustellen. Winkel φ ist im vorliegenden

Falle im Abnehmen begriffen, die Triebstange bewegt sich relativ zum Kurbelarm in dem durch den Pfeil angedeuteten Sinn. Um die Reibung überwinden zu können, muß die Stangenkraft die Bewegung unterstützen, d. h. sie muß den Reibungskreis an der oberen Seite berühren. Die gleiche Ueberlegung gibt die Berührungsstelle am Kreuzkopfzapfen. Um den Drehsinn des verbiegenden Momentes zu erhalten, ist zu bedenken, daß nicht die Stangenkraft, sondern der Druck des Zapfens auf die Stange maßgebend ist. Die oben eingetragenen Pfeile kehren sich um, die Reibungsmomente wirken der Bewegung entgegen. Nachdem der Drehsinn festliegt, erübrigt sich nur noch die Bestimmung der Größe der Momente.

Fig. 28.

1. Annahme:

Der Reibungskoeffizient sei $\mu = 0{,}06$ was ziemlich normalen Verhältnissen entspricht. Die Stangenkraft betrage 30 000 kg und der Durchmesser des Kurbelzapfens $d_1 =$ 135 mm, der des Kreuzkopfzapfens $d_2 = 105$ mm. Mit diesen Werten wird das Reibungsmoment am Kurbelzapfen:

$$M_{ku} = P \cdot r_1 \cdot \mu = 30\,000 \cdot 6{,}75 \cdot 0{,}06 = 12\,150 \text{ cmkg}$$

und das am Kreuzkopfzapfen:

$$M_{kr} = P \cdot r_2 \cdot \mu = 30\,000 \cdot 5{,}25 \cdot 0{,}06 = 9\,450 \text{ cmkg}$$

Die Momente liefern die Momentenlinie ML_R Fig. 27 b. Nach Aufstellung der reduzierten Fläche kann die elastische Linie EL_R konstruiert werden. EL_E und EL_R zusammen addiert, geben in Fig. 27 c die Linie EL, die noch einen beträchtlichen Zuwachs durch die Achsialkräfte erfährt.

3. Einfluß der Achsialkräfte.

Die Druckkraft fällt nicht genau mit der Stabmittellinie zusammen und es wäre eine Zerlegung in zwei Komponente nötig. Bei der geringen Abweichung kann jedoch angenommen werden, daß die ganze Kraft P = 30000 kg bei der weiteren Verbiegung zur Wirkung kommt. Die vorhin gefundene Linie EL u wird nun als Momentenlinie aufgefaßt, daraus die reduzierte gesucht und elastische Linie EL_1 konstruiert Fig. 27 c. EL_u und EL_1 zeigen der Form nach noch manche Verschiedenheit, weshalb noch Linie EL_2 gesucht wurde Fig. 27 d.

Flächen der elastischen Linien $L_1 = 54{,}7$ cm² und $EL_2 = 9{,}56$ cm².

Die Kraft P kann dann anwachsen auf den Wert $k = \frac{54{,}7}{9{,}56} = 5{,}73 \cdot P$, falls der Gleichgewichtszustand nicht gestört werden soll, natürlich unter der Voraussetzung, daß keine sonstigen Beanspruchungen auftreten.

k stellt die sogenannte Knicksicherheit dar.

Die Zuwachsfläche wird $EL\,x = \frac{54{,}7 \cdot 9{,}56}{54{,}7 - 9{,}56} = 11{,}6$ cm² und damit n = 1,21.

Durch Summierung von EL u, EL_1 und EL x ergibt sich die endgültige Verbiegung in Fig. 27 d mit dem Biegungspfeil f = 0,435 mm. Die Momentenfläche ist aus den 3 Belastungsfällen leicht festzustellen. Mit Hilfe der Widerstandsmomente in Tabelle 5 kann der Spannungsverlauf über die ganze Länge der Stange auf der Druckseite aufgetragen werden. Er setzt sich zusammen aus Druck- und Biegungsspannungen. Die letzteren haben hier nur geringen Anteil an der Gesamtanstrengung.

2. Annahme.

Der Reibungskoeffizient für den Ruhezustand soll nun mit dem beträchtlichen Werte von $\mu = 0{,}22$ eingeführt werden. Der Kolben soll die Stellung bei 50 % des Hubes passiert haben, sodaß jetzt die Stangenkraft

die beiden Reibungskreise auf der gleichen Seite berührt. Die Stangenkraft betrage wieder wie oben P = 30 000 kg.

Dann werden die Reibungsmomente:

am Kurbelzapfen: M_{ku} $P \cdot \mu \cdot r_1 = 30000 \cdot 0{,}22 \cdot 6{,}75$
$= 44500$ cmkg

am Kreuzkopf: $M_{kr} = P \cdot \mu \cdot r_2 = 30000 \cdot 0{,}22 \cdot 5{,}25$
$= -34700$ cmkg

Die beiden Momente verbiegen die Stange im gleichen Sinne wie das Eigengewicht. Ihr Einfluß ist in Fig. 29 untersucht. Nach Feststellung der elastischen Linie EL_1 aus ELu kann k und n ermittelt werden:

Inhalt von EL_u = 64 cm² und von EL_1 = 11,1 cm²
damit k = 5,75 und n = 1,21.

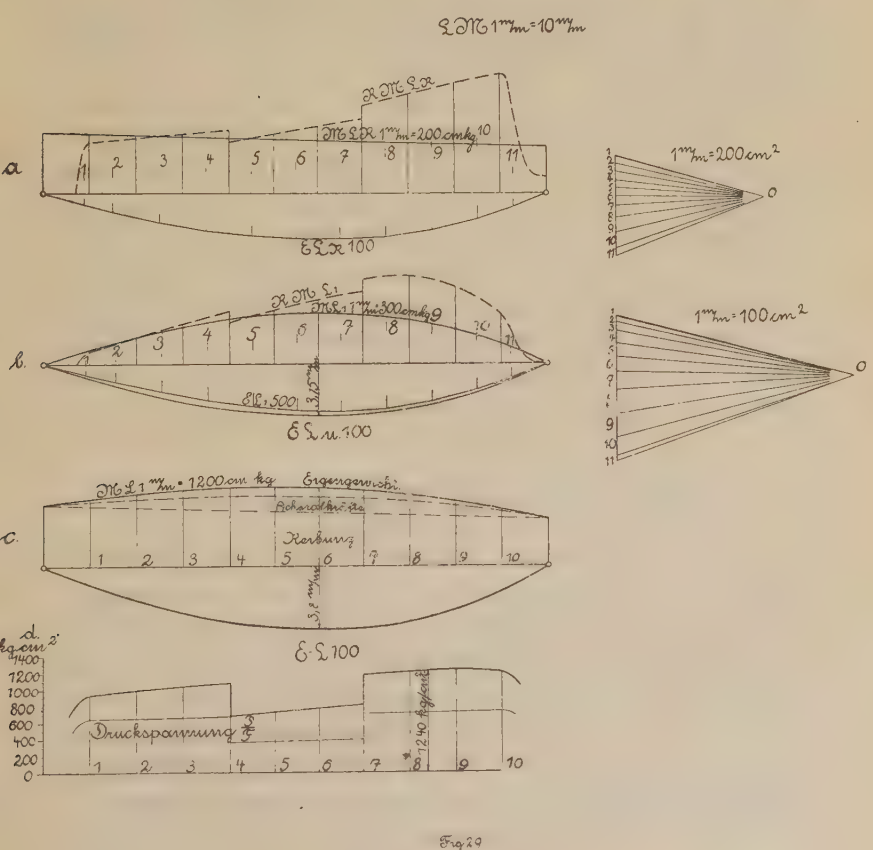


Fig. 29

Fig. 29 c veranschaulicht den Verlauf der Momente über die Stangenlänge, wobei die Einflüsse der einzelnen Belastungsfälle zu erkennen sind. Die endgültige Biegungslinie der Stange weist jetzt den Biegungspfeil f = 3,8 mm auf. Fig. 29 d gibt das Spannungsdiagramm wieder. An der Druckseite treten bereits Spannungen von 1240 kg/cm² auf.

Durch Vergleich der Ergebnisse aus beiden Annahmen läßt sich feststellen, wie wenig die alleinige Kenntnis der Knicksicherheit zur Beurteilung des Zustandes der Stange beiträgt. In jedem Falle haben wir etwa 6fache Sicherheit und trotzdem treten bei der 2. Annahme schon gefährliche Spannungen auf. Durch Heißlaufen, Anfressen der Zapfen, durch Klemmungen, kann sich der Wert von μ noch um ein bedeutendes erhöhen und der Konstrukteur sollte sich über die Bedeutung derartiger unvorhergesehener Einflüsse im Klaren sein.

Im vorliegenden Beispiel wurde an beiden Zapfen gleich ungünstige Verhältnisse angenommen. Nun kann aber leicht der Fall eintreten, daß starke einseitige Beanspruchungen oben erwähnter Art sich einstellen. Dann verschiebt sich die Momentenfläche gegen das Stangenende zu und auch die Beanspruchungen konzentrieren sich dort. Die Tatsache, daß häufig Stangenbrüche in der vertikalen Ebene an den Schaftenden beobachtet werden können, dürfte sich daraus erklären lassen.

2. Belastung in der horizontalen Ebene.

In der horizontalen Ebene kommen nur die Achsialkräfte zur Wirkung, die gewöhnlich mit der geraden Stabachse zusammenfallend angenommen werden und von der sogenannten Knickkraft noch um einen gewissen Betrag, der bei Lokomotiven sehr gering sein kann, entfernt sein müssen. Die Gewähr dürfte jedoch nicht immer gegeben sein, daß die Resultierende aus den Flächenpressungen genau mit der Stabachse zusammenfällt, oft sind schon von vornherein exzentrische Kraftangriffe durch

die Konstruktion bedingt, oder es treten kleine Ungenauigkeiten auf. Besonders bei gegabelten Stangen können leicht Abweichungen gegenüber den vorausgesetzten Bedingungen eintreten.

Um die Bedeutung solcher Abweichungen kennen zu lernen, um zu zeigen, welchen Einfluß mangelhafte Konstruktion oder schlechte Montierung haben kann, wird die Annahme getroffen, die Resultierende aus den Flächenpressungen am Kurbelzapfenlager falle nicht mit der Stabmittellinie zusammen, sondern weiche um 5 mm von ihr ab, ein Wert, der leicht eintreten kann. Am Kreuzkopfzapfen gehe der Lagerdruck durch die Stabmittellinie.

In Fig. 30 ist die Untersuchung wie früher durchgeführt. Tabelle 6 enthält die jetzt geltenden Werte von Θ, $\frac{\Theta m}{\Theta}$, wobei $\Theta m = 300$ cm^4 beträgt und die der Widerstandsmomente W.

Tabelle 6.

Querschnitt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Θ cm^4	161	160,5	160,3	160,1 422	402	383	366 159,7	159,5	159,4	159,3
$\frac{\Theta m}{\Theta}$	1,86	1,863	1,865	1,868 0,71	0,746	0,784	0,82 1,875	1,878	1,88	1,882
W cm^3	43	42,9	42,8	42,7 113	107	102	98 42,6	42,5	42,5	42,4

Der labile Gleichgewichtszustand wird erreicht bei Vermehrung der Kraft P um das k = 1,78fache.

Der Zuwachskoeffizient n = 2,28.

In Fig. 30d wurde das Endresultat zusammengestellt, wobei sowohl bei der Momentenfläche, wie auch bei der elastischen Linie die Anteile des Momentes infolge des exzentrischen Kraftangriffes und der reinen Druckkräfte zu erkennen sind.

Fig. 30c veranschaulicht den Spannungsverlauf mit einem σ max. = 1190 kg/cm^2. Auch hier nähern wir uns

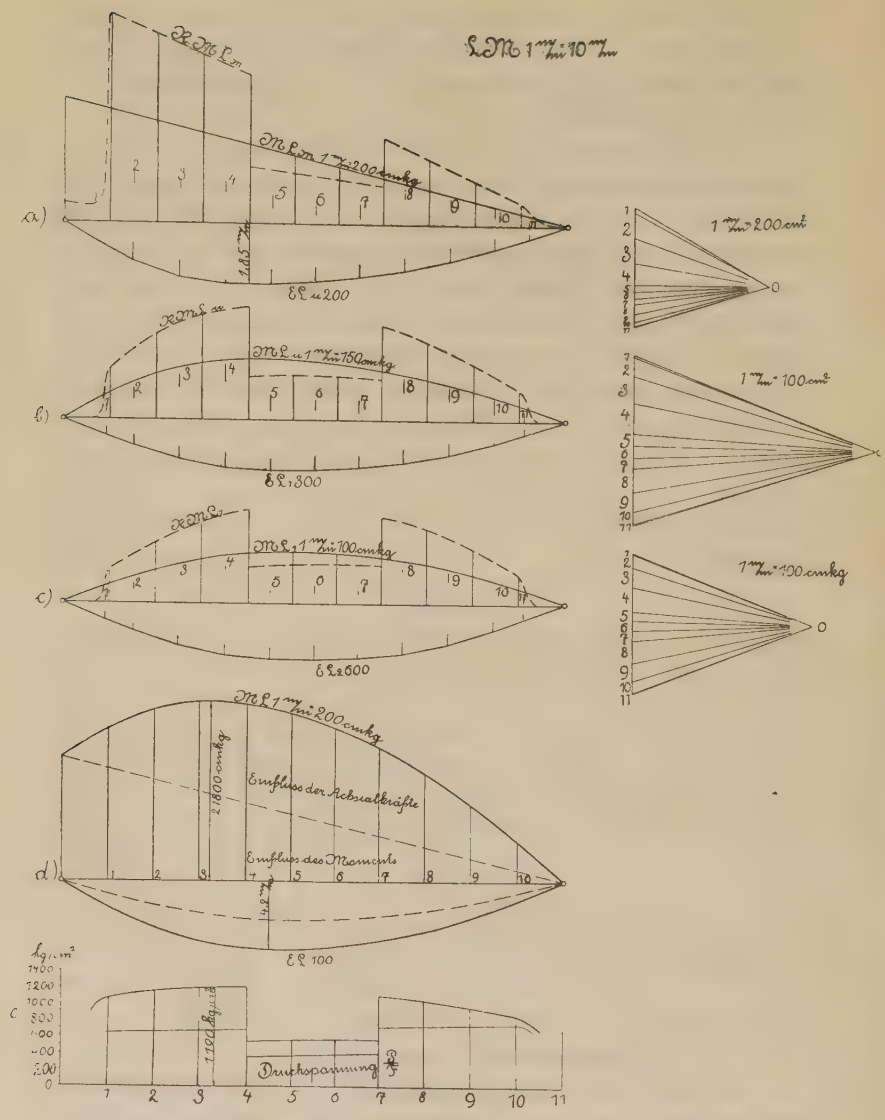


Fig. 30

bedenklich der zulässigen Grenze, die bei der fortwährend wechselnden Belastung von Zug und Druck nicht allzuhoch anzunehmen ist. Das Spannungsdiagramm läßt erkennen, daß die gefährdeten Querschnitte mehr und mehr sich den

Schaftenden nähern, je größer der Einfluß des Momentes wird.

Treffen an einem Zapfen die ungünstigen Verhältnisse, wie sie bei dem Belastungsfall in der vertikalen und der horizontalen Ebene angenommen wurden, zusammen, so erhalten wir an einer Kante eine Spannung

$$\sigma \text{ max.} = 1190 + 400 = 1590 \text{ kg/cm}^2.$$

Dabei beträgt der Sicherheitskoeffizient in der einen Richtung 5,72 und in der anderen 1,78.

C. Kuppelstangen.

Die Verhältnisse liegen bei den Kuppelstangen ähnlich wie bei den Triebstangen, nur gestaltet sich die Untersuchung meistens einfacher, da gewöhnlich keine Verschiedenheit in den Trägheitsmomenten besteht; die Querschnitte sind meistens konstant. Exzentrische Beanspruchungen sind bei ihnen schon häufig durch die Konstruktion gegeben und eine Nachprüfung auf den tatsächlichen Spannungszustand ist dann unerläßlich. Die Gefahr des Ausbiegens an den Schaftenden liegt noch näher als bei den Triebstangen, da die Zapfendurchmesser oft große Unterschiede aufweisen und schon von vornherein eine ungleiche Momentenverteilung vorliegt. So hat z. B. die eine Kuppelstange der Lokomotive, deren Triebstange untersucht wurde, folgende Zapfendurchmesser: am 1. Kurbelzapfen $d_1 = 100$ mm und am 2. Kurbelzapfen $d_2 = 175$ mm. Gleiche Reibungskoeffizienten vorausgesetzt, verhalten sich die Momente wie 1 : 1,75.

Lebenslauf.

Ich, Karl Eymann, wurde am 29. Februar 1888 zu Langmeil (Pfalz) geboren. Nach dem Besuche der Volksschule trat ich in die Kgl. Kreisrealschule und später in die Kgl. Industrieschule zu Kaiserslautern ein. Letztere absolvierte ich im Jahre 1907, um an die Kgl. Technische Hochschule zu München überzusiedeln. 1911 legte ich die Diplomprüfung als Maschineningenieur an dieser Hochschule ab. Während der nächsten 2 Jahre hatte ich die Assistentenstelle für Dampf-Eisenbahnmaschinen und Dampfkessel an der Kgl. Technischen Hochschule zu Breslau inne. Seit September 1913 bin ich als Ingenieur bei der Badischen Anilin- und Sodafabrik in Ludwigshafen am Rhein tätig.